



Universidade Federal de Santa Catarina

Centro de Ciências Físicas e Matemáticas

Departamento de Física

Programa de Pós-graduação em Física

Dissertação de mestrado

O processo Drell–Yan e o grande colisor de hádrons

Mestrando: Marcos Kendi Yamasaki

Orientador: Prof. Dr. Emmanuel Gräve de Oliveira

Florianópolis, 12 de abril de 2016



Universidade Federal de Santa Catarina

Centro de Ciências Físicas e Matemáticas

Departamento de Física

Dissertação de mestrado

O processo Drell–Yan e o grande colisor de hádrons

Dissertação de mestrado submetida ao Departamento de Física da Universidade Federal de Santa Catarina, sob orientação do professor Dr. Emmanuel Gräve de Oliveira, como parte dos requisitos para obtenção do título de mestre em Física

Acadêmico: Marcos Kendi Yamasaki

Orientador: Prof. Dr. Emmanuel Gräve de Oliveira

Florianópolis, 12 de abril de 2016

Ficha de Identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Yamasaki, Marcos Kendi
O processo Drell-Yan e o grande colisor de hádrons /
Marcos Kendi Yamasaki ; orientador, Emmanuel Grève de
Oliveira - Florianópolis, SC, 2016.
65 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas.
Programa de Pós-Graduação Multidisciplinar em Saúde.

Inclui referências

1. Saúde. 2. Cromodinâmica quântica. 3. Drell-Yan. 4.
Cálculo em ordem seguinte à dominante. 5. Escala de
fatorização ótima. I. Oliveira, Emmanuel Grève de. II.
Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós
Graduação Multidisciplinar em Saúde. III. Título.

Sumário

| | |
|--|-------|
| Resumo | p. 5 |
| Abstract | p. 6 |
| 1 Introdução | p. 7 |
| 2 Cromodinâmica quântica e os pártons | p. 11 |
| 2.1 Liberdade assintótica | p. 11 |
| 2.2 Modelo de pártons | p. 16 |
| 2.3 Distribuições de pártons mais utilizadas | p. 17 |
| 2.4 Distribuições de pártons a pequeno x | p. 19 |
| 2.5 Equações de Evolução DGLAP | p. 21 |
| 2.6 Fator de forma de Sudakov | p. 23 |
| 3 Processo Drell–Yan | p. 25 |
| 3.1 Medidas do Drell–Yan no LHC | p. 25 |
| 3.2 Processo Drell–Yan em ordem dominante | p. 28 |
| 3.3 Processo Drell–Yan em ordem seguinte à dominante | p. 31 |
| 3.4 Espalhamento Compton | p. 33 |
| 3.5 Divergências do processo Drell–Yan em ordem seguinte à dominante | p. 37 |
| 3.6 Fatorização | p. 38 |
| 3.7 Contribuição de cada ordem de perturbação | p. 39 |
| 4 Cálculo da escala de fatorização ótima | p. 42 |

Sumário

| | | |
|-------|--|-------|
| 4.1 | Cálculo da escala fatorização ótima | p. 42 |
| 4.2 | Corte no momentum transversal | p. 44 |
| 4.3 | Cálculo da seção de choque partônica | p. 46 |
| 4.3.1 | Integral no momentum transversal do párton C | p. 47 |
| 4.3.2 | Integrais nas frações de momentum, x_A e x_B | p. 48 |
| 4.3.3 | Seção de choque diferencial dupla em função de observáveis | p. 49 |
| 4.3.4 | Integral nos momenta longitudinais p_{Dz} e p_{Ez} | p. 49 |
| 4.3.5 | Limites de integração | p. 51 |
| 4.4 | Próximos passos | p. 52 |
| 5 | Conclusão e perspectivas | p. 54 |
| | Referências Bibliográficas | p. 56 |
| | Apêndice A – Seção de choque partônica | p. 59 |
| | Apêndice B – Regras de Feynman | p. 61 |
| | Apêndice C – Fator de cor | p. 63 |

Resumo

A cromodinâmica quântica, bem como os critérios utilizados para sua validação em uma análise perturbativa são fundamentais para entendermos os constituintes dos prótons. Em particular, o modelo de pártons e como se dá a evolução da distribuição de pártons dentro dos hádrons que se chocam em colisores como o LHC. Um instrumento poderoso para a determinação das funções de distribuição de pártons é o processo Drell–Yan (produção do par de léptons – dilépton), resultante da colisão entre prótons no LHC. Uma possibilidade teórica é analisar o processo Drell–Yan em ordem dominante – onde há apenas a aniquilação de pártons – com equações de evolução das distribuições. Ao utilizar certas equações para evoluir uma distribuição de pártons, esta passa a depender da escala de energia do processo que, por exemplo, separa as contribuições em ordem dominante daquelas em ordem seguinte à dominante. Através de uma escala de fatorização ótima, pode-se incluir toda a parte relevante em ordem seguinte à dominante já no termo dominante. A escala de fatorização ótima pode ser reduzida se um corte cinemático é imposto no dilépton, possibilitando sondar uma região das distribuições de pártons de fração de momentum pequena, com forte dominância da distribuição de glúons e ainda pouco entendida. Este conjunto teórico é revisado e são colocadas possibilidades de trabalhos futuros na área.

Palavras chave: Cromodinâmica quântica, Teoria quântica de campos, Modelo padrão, Drell–Yan, Cálculo em ordem seguinte à dominante, escala de fatorização ótima.

Abstract

Quantum chromodynamics, as well as the criteria used for its validation in a perturbative analysis are fundamental to understand the proton constituents. Particularly, the parton model and how the parton distribution evolve in collided hadrons inside colliders such as the LHC. A powerful tool in the determination of the parton distribution functions is the Drell–Yan process (production of a lepton pair – dilepton), resulting from proton collision at the LHC. A theoretical possibility is to analyze the Drell–Yan process in the leading order – where there is only parton annihilation – with distribution evolution equations. Using these equations to evolve a parton distribution, it becomes dependent on the energy scale of the process which, for example, separates the contributions of the leading order from the ones of next-to-leading order. Through an optimum factorization scale, it is possible to include all the relevant part of the next-to-leading order in the leading term. The optimum scale can be reduced if a kinematic cutoff is imposed on the dilepton, making possible to probe a region of the parton distribution of low momentum fraction, strongly dominated by the gluon distribution and still not well understood. This theoretical set is reviewed and future work possibilities are presented.

Keywords: Quantum chromodynamics, quantum field theory, standard model, parton model, Drell–Yan, Next-to-leading order calculation, optimum scale.

1 *Introdução*

Grandes esforços da humanidade foram feitos através da história para responder a pergunta fundamental do que a matéria é formada e, com esse intuito, a dividimos em partes cada vez menores até chegarmos em partículas elementares, que acreditamos, pelo menos por hora, serem indivisíveis. As partículas elementares foram organizadas no Modelo Padrão juntamente com suas quatro interações fundamentais: a eletromagnética, a interação forte, a fraca e a gravitacional.

O modelo padrão está dividido em férmions (partículas de momento angular intrínseco – spin – semi-inteiro) e bósons (partículas de spin inteiro). Além disso, em contrapartida ao conceito de partículas, temos as antipartículas que carregam cargas elétricas opostas às das suas partículas correspondentes. Os bósons desempenham a função de partículas mediadoras das interações fundamentais: eletromagnética pelo fóton, a forte pelo glúon e a fraca pelos bósons W^+ , W^- e Z . A interação gravitacional, não teve sua partícula correspondente (gráviton) detectada, apesar da recente descoberta das ondas gravitacionais [1].

Os férmions por sua vez são agrupados em léptons (carga inteira) e quarks (carga fracionária e sujeitos à interação forte). Os quarks não são encontrados livremente, eles estão confinados em partículas compostas denominadas hádrons (prótons e nêutrons, entre outros). Esse confinamento é mantido por partículas de interação da força forte, glúons (*glue*), que *colam* os quarks uns aos outros dentro dos hádrons. Os quarks podem ter os seis sabores: down, up, strange, charm, bottom e top, organizados em três gerações, cada uma composta por um quark de carga $-1/3$ e outro de $+2/3$.

A teoria que estuda a interação dos quarks intermediada pelos glúons é a cromodinâmica quântica (*quantum chromodynamics* – QCD). A carga da interação forte é a carga de cor, com três possibilidades: *red*, *green* e *blue*; estes são apenas nomes para as cargas e não estão relacionadas com a percepção de cor humana. A introdução desta nova carga surgiu para caracterizar a partícula Δ^{++} que violava o Princípio de exclusão de Pauli, pois é formado por 3 quarks up

(*uuu*) resultando numa carga elétrica $++$. Para manter o princípio de exclusão de Pauli criou-se então mais este grau de liberdade, a cor, justificando assim o nome da teoria. Os quarks carregam apenas uma carga de cor, enquanto que antiquarks carregam as anticores, já o glúon carrega uma cor e uma anticor, de maneira que os hádrons, constituídos de quarks e glúons, são brancos (ou incolores).

Boa parte dos resultados experimentais usados na construção do modelo padrão vieram de colisões entre partículas. Em muitos destes colisores, os objetos que são acelerados e colididos são os hádrons. Em regime de altas energias, os hádrons são pensados como sendo compostos por partículas pontuais, ou seja, sem dimensão, chamadas de pártons, identificados como os quarks e os glúons. Este modelo de pártons foi introduzido por Feynman para o espalhamento profundamente inelástico em que um próton é sondado pelo fóton emitido por um elétron. O objetivo da sonda, claro, é caracterizar as funções de distribuição de pártons (*parton distribution functions* – PDF), ou simplesmente distribuição de pártons dentro dos hádrons.

O confinamento de pártons em hádrons ocorre a baixas energias, esse fenômeno é causado pela força forte, cuja magnitude é dada pelo parâmetro de acoplamento – α_s . Experimentos e teoria mostram que α_s decresce com o aumento da escala de energia – Q – esse comportamento no limite de α_s tendendo a zero é denominado liberdade assintótica, fenômeno que é intensamente utilizado em vários colisores de hádrons e permite utilizar a teoria de perturbação para estudarem-se colisões em altas energias. Contudo, para baixas energias, é necessário usar um método não perturbativo, como a QCD na rede, para estudar o confinamento.

Para aperfeiçoar o modelo padrão que foi discutido até agora e, em especial os constituintes dos hádrons por meio das distribuições de pártons, utilizam-se colisões entre hádrons. Um dos grandes centros tanto pelo desenvolvimento teórico como a construção e gestão dos colisores de partículas é a Organização Europeia para a Pesquisa Nuclear conhecida como CERN (sigla para o antigo nome *Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire*) criada em 1954. O CERN é responsável pelo maior colisor do mundo: o Grande Colisor de Hádrons (*Large Hadron Collider* – LHC), uma estrutura circular com 27 km de circunferência localizada em até 175 m de profundidade na fronteira franco-suíça. No LHC, prótons são acelerados em sentidos opostos a maior energia já atingida de 13 TeV em uma colisão.

Nos pontos onde ocorrem as colisões entre prótons, estão instaladas grandes estruturas para detectar partículas resultantes das colisões, dentre os quais listamos as quatro principais: o ALICE (*A Large Ion Collider*), o ATLAS (*A Toroidal LHC Apparatus*), o CMS (*Compact Muon Solenoid*,) e o LHCb (*Large Hadron Collider beauty*). Dentre as detecções recentes mais importantes do LHC, destacam-se os hádrons exóticos: tetraquarks pelo LHCb em 2014 [2] e

os pentaquarks em 2015 [4] que são hádrons diferentes dos formados por 3 quarks (baryons) e 2 quarks (mésons) que haviam sido encontrados até então. Ambos surgem de estados ressonantes, ou seja duram pouquíssimo tempo ($10^{-23}s$).

O projeto do próximo colisor do CERN, o *Future Circular Colider* será apresentado em 2018 ao conselho do CERN. Estudos para a construção do túnel de 80 a 100 km na área de Geneve necessária para tal instalação, design do detector e avaliação de custo estão em andamento, com início das operações previsto entre 2035-2040. Com energia de centro de momentum de 100 TeV visa investigar principalmente: plasma de quarks e glúons com observáveis macios, novas possibilidades com sondas duras, cromodinâmica quântica de alta densidade e saturação de glúons no estado inicial de colisões de íons pesados e colisões de fótons induzidos [3].

Irrestrito aos esforços europeus na construção de colisores, a China começará em 2020 o projeto do colisor de partículas que será o maior do mundo, se concluído. No mínimo terá o dobro do tamanho do LHC, e colidirá partículas com energia 7 vezes maior. O colisor chinês tem como principal objetivo o melhor entendimento do Bóson de Higgs, que foi detectado em 2012 no LHC. Wang Yifang, diretor do Instituto de Física de Altas Energias da Academia Chinesa de Ciências, disse que o projeto é uma máquina para o mundo e pelo mundo: não apenas uma máquina chinesa. Ele adicionou que vários físicos de diversos países viajaram e viajarão para a China para ajudar com o projeto.

As colisões entre prótons que ocorrem no LHC e em outros colisores de hádrons podem gerar vários produtos finais a serem detectados. Um dos mais interessantes é processo Drell–Yan, onde, em ordem dominante (*leading order* – LO), consideramos um quark vindo de um próton e um antiquark vindo de outro e, a partir da aniquilação do par, forma-se um bóson virtual que pode ser o Z ou um fóton que cria um par de léptons (dilépton). Na ordem seguinte à dominante (*next-to-leading order* – NLO) o glúon pode desempenhar o papel de párton inicial no lugar do quark (ou antiquark). A vantagem do processo Drell–Yan se dá ao fato dos léptons do estado final interagirem apenas pela força eletrofraca, diferentemente dos quarks (ou glúons) do estado inicial que interagem pela força forte, separando as interações. A escala característica do processo Drell–Yan é a massa invariante do dilépton M^2 , já que não existem outras escalas relevantes despreza-se as massas dos quarks e não se mede nenhuma variável cinemática do dilépton.

Devido ao problema de separar o que é perturbativo (a produção Drell–Yan) e o que não é (as distribuições de pártons), usa-se a técnica de fatorização, que será discutida em mais detalhe nesta dissertação. Em resumo, as distribuições de pártons passam a depender da dita escala de fatorização por meio de uma equação de evolução perturbativa. Para o processo Drell–Yan, a

primeira escolha para esta escala seria a massa de dilépton M . Contudo, a teoria não diz a priori qual deve ser esta escala de fatorização, sendo um problema a ser determinado. Mostrou-se por várias análises que em muitos casos a principal incerteza teórica é justamente na determinação da escala de fatorização.

Usando a liberdade na escolha da escala de fatorização, é possível inserir na ordem dominante do processo Drell–Yan uma contribuição característica da ordem seguinte à dominante do processo causada por glúons no estado inicial. Desse maneira, ao analisar-se a ordem seguinte à dominante, esta contribuição não deverá ser contada novamente. Assim, obtém-se uma escala de fatorização ótima que reduz a incerteza do resultado teórico. Além do mais, o valor da escala de fatorização ótima pode ser variada através de um corte cinemático.

Nesta dissertação, no Cap. 2 revisaremos a partir da cromodinâmica quântica até o modelo de pártons e como as distribuições de pártons são utilizadas para caracterizar os hádrons. No Cap. 3 revisaremos a ordem dominante e a ordem seguinte à dominante do processo Drell–Yan e, como o segundo pode ser incorporado no primeiro em uma escala de fatorização. No Cap. 4, mostraremos como essa inclusão é feita, calculando a escala de fatorização ótima. A conclusão do trabalho e perspectivas futuras estão listadas no Cap. 5.

2 Cromodinâmica quântica e os pártons

Os quarks não são encontrados livremente na natureza, pois estão confinados em partículas denominadas hádrons. Esse confinamento, um resultado por assim dizer experimental, é mantido por partículas de interação da força forte, os glúons, que mantém os quarks nos hádrons. Contudo, em altas energias, podemos estudar os quarks como se estes estivessem livres dentro dos hádrons. Damos nome à este efeito de liberdade assintótica, compreendida através da constante de acoplamento α_s , que varia conforme a escala de energia usada. Para obter observáveis devemos ter um valor finito para α_s e então a teoria usada para descrever a interação forte tem de ser renormalizada. A escala de energia utilizada determina também o modelo que pode ser usado, nesse capítulo trataremos do modelo de pártons e como os pártons estão distribuídos com o uso das funções de distribuição de pártons. Ainda estudaremos as correções ao modelo vindas da cromodinâmica quântica em ordem seguinte à dominante, determinadas pela fatorização, e como obter novas informações à respeito delas. Todos os cálculos são realizados nas chamadas unidades naturais, onde a massa, o momentum e a energia possuem a mesma unidade, consequência de considerarmos a velocidade da luz e a constante reduzida de Planck iguais a um ($c = 1 = \hbar$).

2.1 Liberdade assintótica

A interação primitiva da cromodinâmica quântica é definida por um quark emitindo um glúon, como mostrada na Fig. 2.1. Essa interação é representada por um diagrama de Feynman¹, onde as linhas retas representam o quark e a mola o glúon. No ponto onde as linhas retas se unem a mola é denominado vértice. Esse diagrama é chamado vértice primitivo da cromodinâmica quântica.

Essa emissão deve respeitar a conservação de carga de cor. O quark pode carregar as cargas r (*red*), g (*green*) ou b (*blue*) e mudar de cor mas não o seu sabor (*up* - u , *down* - d , *charm* - c , *strange* - s , *top* - t ou *bottom* - b). Digamos que temos um quark *up* que possui carga b , para

¹ São representações dos processos de física de partículas, mais detalhes podem ser encontrados na Ref. [5]

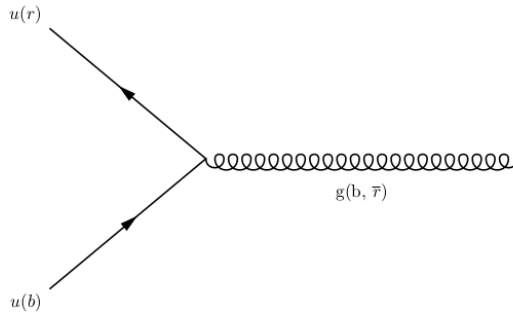


Figura 2.1: Vértice primitivo da Cromodinâmica Quântica - Um quark de sabor *up* u de carga *blue* - b emite um glúon g de carga (b, \bar{r}) , mantém o sabor u e passa a carregar a carga *red* - r . Esse vértice caracteriza a ordem seguinte à dominante no Processo Drell–Yan, como será discutido mais adiante.

trocar para a carga r ele deve emitir um glúon com a diferença de cargas, ou seja uma carga b e uma anticarga \bar{r} .

Quarks formam os hádrons em singletos de cor, ou seja são neutros quanto a carga (incolors ou brancos). Há duas possibilidades de quarks formarem hádrons respeitando esse quesito: dois quarks, sendo que um quark carrega uma cor e o antiquark carrega a anticor correspondente, essa combinação é chamada méson. A outra possibilidade é dada por três quarks, cada quark carregando uma cor diferente das outras duas, essa combinação é chamada de bárion.

Para manter a conservação de carga, os glúons carregam sempre 2 cargas de cor, portanto deveria haver $3 \times 3 = 9$ tipos de glúons, mas a natureza não permite que o glúon seja *incolor* pois isso o tornaria uma partícula livre, restando apenas 8 tipos. O entendimento da QCD se dá pelo grupo de simetria $SU(3)$ (*Special Unitary*) com $N^2 - 1$ geradores, dado pelas matrizes complexas unitárias 3×3 e pelo produto entre elas.

As teorias de *gauge*, ou mais comumente chamadas teorias de calibre, são teorias físicas baseadas na ideia de que existem simetrias de calibre locais e globais. Muitas teorias são descritas através de densidades lagrangianas que são invariantes sob determinados grupos de transformações de simetria; quando a lagrangiana é invariante sob uma transformação idêntica em todos os pontos do espaço, a simetria é global e quando a lagrangiana é invariante sob uma transformação que é diferente em diferentes pontos do espaço, a simetria é local. No caso da QCD, a simetria é a das cargas de cores.

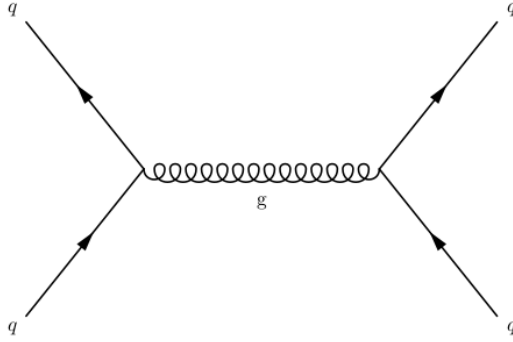


Figura 2.2: Interação entre quarks q , representados pelas setas, através de um glúon g , representado pela mola. Esse diagrama é formado a partir de dois vértices primitivos da Fig. 2.1, porém não podemos afirmar qual quark está emitindo o glúon e qual o está absorvendo.

A densidade lagrangiana da cromodinâmica quântica é:

$$\mathcal{L} = \sum_q \bar{\psi}_{q,a} (i\gamma^\mu \partial_\mu \delta_{ab} - g_s \gamma^\mu \lambda_{ab}^C \mathcal{A}_\mu^C - m_q \delta_{ab}) \psi_{q,b} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^A F^{A\mu\nu}, \quad (2.1)$$

onde os índices repetidos são somados, as matrizes de Dirac são representadas por γ^μ , os $\psi_{q,a}$ são os spinores do campo do quark de sabor q , massa m_q e carga de cor a que vai de $a = 1$ até $N_c = 3$. O primeiro termo dentro do parênteses representa o momentum do quark, e juntamente com o terceiro termo representam a lagrangiana de um férmion livre.

No segundo termo dentro do parênteses, \mathcal{A}_μ^C corresponde ao campo do glúon que descreve a interação entre os spinores, com C indo de 1 até $N_c^2 - 1 = 8$. As matrizes λ_{ab}^C correspondem às 8 matrizes 3×3 geradoras do grupo SU(3) e g_s é o parâmetro de acoplamento de calibre da QCD (ou apenas parâmetro de acoplamento). O tensor de campo, $F_{\mu\nu}^A$ caracteriza a interação entre quarks é dado por:

$$F_{\mu\nu}^A = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^A - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^A - g_s f_{ABC} \mathcal{A}_\mu^B \mathcal{A}_\nu^C \quad [\lambda^A, \lambda^B] = i f_{ABC} \lambda^C \quad (2.2)$$

onde f_{ABC} são as constantes de estrutura do grupo SU(3). A álgebra das matrizes de Gell–Man é revista no Apêndice C quando calculamos o fator de cor, que será visto no Cap. 3.

A interação entre dois quarks mediada pelo glúon é apresentada na Fig. 2.2, a magnitude dessa interação é dada pela constante de acoplamento g_s ou $\alpha_s = g_s^2/(4\pi)$. No entanto, α_s varia conforme a escala de energia analisada, por isto, a “constante” é renomeada parâmetro. O cálculo de variação de α_s com a energia é feito através da polarização do vácuo representada

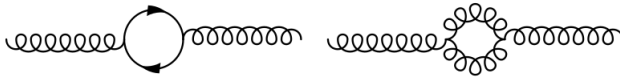


Figura 2.3: Diagramas da polarização do vácuo em ordem α_s^2 . O primeiro diagrama é construído a partir da união de dois diagramas de vértices primitivos, Fig. 2.1, formando um laço de férmions. O segundo diagrama é formado a partir da união de dois diagramas de desdobramento do glúon em dois glúons formando um laço de glúons.

nos diagramas da Fig. 2.3. Ao aplicarmos as regras de Feynman² para os diagramas da Fig. 2.3, haverá um termo $1/p^2$, sendo p o momentum do férmion ou do glúon no laço, que ao ser integrado causará uma divergência.

Para lidarmos com essa divergência, fazemos a regularização e a renormalização. A regularização consiste em tornar integrais divergentes, irregulares, em integrais regulares finitas por meio de um regulador. A renormalização consiste em redefinir os parâmetros envolvidos (parâmetro de acoplamento, massa e normalização do campo) de maneira que eles absorvam os termos divergentes. Após a renormalização, os resultados não dependem mais do parâmetro utilizado na regularização, mas sim da escala de renormalização μ_R . Também é um resultado da renormalização a forma como o parâmetro de acoplamento depende da escala de energia Q , ou seja, a equação do grupo de renormalização ou equação de Callan-Symanzik [10, 11]:

$$Q \frac{d}{dQ} \alpha_s(Q) = \beta(\alpha_s(Q)) = -(b_0 \alpha_s^2(Q) + b_1 \alpha_s^3(Q) + \dots) \quad (2.3)$$

A solução considerando apenas o primeiro termo da expansão em série de β também é uma série:

$$\alpha_s(Q) = \alpha_s(\mu_R) - b_0 \alpha_s^2(\mu_R) \ln(Q/\mu_R) + b_0^2 \alpha_s^3(\mu_R) \ln^2(Q/\mu_R) + \dots \quad (2.4)$$

Somando os termos da série, temos:

$$\alpha_s(Q) = \frac{\alpha_s(\mu_R)}{1 + b_0 \alpha_s(\mu_R) \ln(Q/\mu_R)} \quad (2.5)$$

onde $b_0 = (33 - 2N_f)/12\pi$ e N_f é o número de sabores dos quarks.

A variação de α_s com a escala é mostrada na Fig. 2.4, incluindo dados experimentais para diferentes processos e colisores. A Fig. 2.4 e a Eq. 2.5 mostram que o parâmetro de acoplamento

²A aplicação das regras de Feynman pode ser vista nas Ref. [5] [6], e cálculos mais explícitos na Ref. [7], nesse trabalho seguimos a convenção de sinais da Ref. [8].

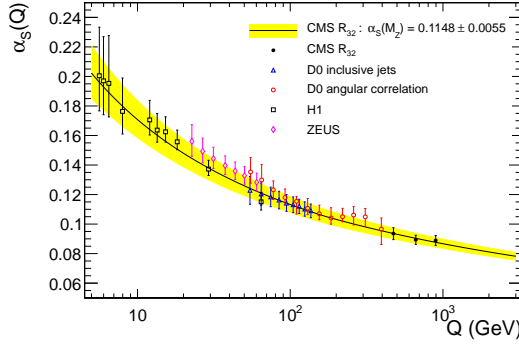


Figura 2.4: Parâmetro de acoplamento $\alpha_s(Q)$ linha cheia com a incerteza em amarelo desenvolvida pela CMS usando a solução da equação de renormalização de grupo (Eq. 2.3) em função da transferência de momentum. São mostrados também os resultados do H1, ZEUS e D0 experimentos dos colisores HERA e Tevatron. Figura retirada de [12].

forte diminui para grandes valores de Q , ou seja:

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} \alpha_s(Q) \rightarrow 0 \quad (2.6)$$

Essa característica de α_s é conhecida como liberdade assintótica, quando a força forte diminui com o aumento da escala e os quarks podem ser interpretados como livres. Para valores pequenos de Q temos o limite infravermelho enquanto que para valores grandes de Q temos o limite ultravioleta.

Usando unidades naturais, a dimensão de comprimento é dada pelo inverso da dimensão da energia, que possui a mesma unidade da massa. Sendo assim, grandes valores de energia (ou grandes valores de massa) correspondem a distâncias curtas e consequentemente, o comportamento da liberdade assintótica é válido. Enquanto que longas distâncias serão dadas por baixos valores de energia, da ordem de 1 GeV, correspondente à massa do próton.

Geralmente usamos a massa do bóson Z como referência para determinar o parâmetro de acoplamento (mostrado na legenda da Fig. 2.4). Um formato alternativo é escolher um parâmetro Λ , que representa a escala na qual α_s divergiria se extrapolássemos sua validade para este domínio. Esse valor é definido como:

$$\Lambda_{QCD} = \mu_R \exp \left(-\frac{1}{b_0 \alpha_s(\mu)} \right) \quad (2.7)$$

Então a Eq. 2.5 se torna:

$$\alpha_s(Q) = \frac{1}{b_0 \ln\left(\frac{Q}{\Lambda_{QCD}}\right)}. \quad (2.8)$$

2.2 Modelo de pártons

Em regimes de altas energias, os constituintes dos hádrons são entendidos como partículas pontuais, ou seja sem dimensão, identificados quarks e glúons passam a ser denominados pártons. Muitos hádrons são colididos simultaneamente nos colisores, gerando um grande número de partículas. Sendo assim, analisamos as colisões de uma maneira probabilística através da seção de choque. Numa aproximação colinear, os hádrons não têm momentum transversal considerável, mas apenas momentum longitudinal assim como seus pártons constituintes. Nessa aproximação podemos caracterizar os pártons pela fração de momentum longitudinal x que ele leva do hádron.

A seção de choque hadrônica que é medida experimentalmente depende de como os pártons iniciais estão distribuídos em função da fração de momentum do hádron que carregam. Em uma colisão entre um párton A e um párton B, a seção de choque diferencial hadrônica será dada por:

$$d\sigma = f(x_A)f(x_B)\hat{\sigma}dx_Adx_B \quad (2.9)$$

onde $f(x_A)$ é a função de distribuição de pártons A com fração de momento x_A , $f(x_B)$ é a função de distribuição de pártons B e $\hat{\sigma}$ é a seção de choque partônica.

A função de distribuição de pártons³ *Parton Distribution Function* - PDF dá a probabilidade em função apenas da fração de momentum x do próton, independentemente da escala de energia usada, portanto independem da dimensão. Essa característica de não depender da dimensão, é uma consequência do Modelo de pártons que Feynman introduziu para interpretar o espalhamento profundamente inelástico⁴ para quarks pontuais [13, 14].

Como as funções de distribuição de pártons (ou apenas distribuição de pártons) são as probabilidades de encontrar os vários constituintes do próton, elas devem ser normalizadas de uma maneira que resultam nos números quânticos do próton. Os pares quark-antiquark que não contribuem para obter números quânticos são denominados quarks de mar. Já os quarks ou antiquarks que não formam pares, a partir dos quais obtemos números quânticos, são denominados

³ ou também chamada densidade de distribuição de pártons

⁴ No espalhamento profundamente inelástico, a dimensão de um hádron pode ser dada pelo inverso da transferência de momentum do fóton para o hádron, $1/Q$, no limite $Q \rightarrow \infty$, os constituintes do hádron, os quarks e glúons, passam a não depender de Q . Ou seja, não tem dimensão e passam a ter carácter puntual.

quarks de valência.

Como os quarks de valência do prótons formam um estado uud , devemos ter: somando todos os quarks up de valência é preciso totalizar 2:

$$\int_0^1 [u(x) - \bar{u}(x)] dx = 2 \quad (2.10)$$

e somando todos os quarks down de valência é preciso totalizar 1:

$$\int_0^1 [d(x) - \bar{d}(x)] dx = 1. \quad (2.11)$$

A soma de todas funções de distribuições de pártons $f_i(x)$ para todos os sabores i devem satisfazer a conservação de momento e energia em todo o x , ou seja:

$$\sum_i \int_0^1 x f_i(x) dx = 1 \quad (2.12)$$

As PDFs são universais (ou globais), ou seja independem do processo no qual são usadas, já que pensamos que são características dos hádrons e não dos processos.

Ao analisar as seções de choque usando as distribuições de pártons em diferentes escalas de energia, nota-se que há uma dependência com a escala, essa mudança ou evolução com a escala é dada pelas equações de evolução DGLAP como será visto na Seção 2.5. Esta nova dependência:

$$f(x_B) \rightarrow f(x_B, \mu) \quad (2.13)$$

faz com que o modelo de pártons deva ser corrigido.

2.3 Distribuições de pártons mais utilizadas

Esforços constantes são feitos na melhora das distribuições para que acompanhem o desenvolvimento dos colisores e assim obter uma melhor descrição da natureza. Estes esforços são feitos por grupos de pesquisa ao redor do mundo, que distribuem seus resultados para as PDFs para que toda a comunidade seja beneficiada. Existe a biblioteca LHAPDF [15, 16] que reúne as PDFs dos diferentes grupos.

A exemplo temos a PDF CT14 que é uma melhora da CT10, mas como a CT10 possui dados apenas do experimentos HERA e Tevatron, a CT14 passa incluir dados do LHC a 7 e 8 TeV, bem como predições para energias de 13 TeV. A análise de cromodinâmica perturbativa da CT10 em ordem seguinte à dominante e em ordem seguinte à seguinte à dominante, enquanto foram produzidas distribuições CT14 até a terceira ordem de perturbação. As novas medidas

incluídas permitiram sondar novas combinações de sabores e os parâmetros da CT14 são mais flexíveis permitindo capturar variações nas dependências da PDF em x e μ [17].

A distribuição HERAPDF foi feita a partir de dados das colaborações H1 e do ZEUS do espalhamento profundamente inelástico a pequeno x para extrair funções de distribuição de quarks e glúons. As operações do HERA são divididos em HERA I (1992-2000) e HERA II (2002-2007). A distribuição HERAPDF é parametrizada através dos quarks u , d e s de valência, e evoluídas usando as equações DGLAP em ordem seguinte à dominante. A HERAPDF traz informações a baixo Q^2 dos quarks e glúons de mar e a alto Q^2 dos quarks de valência. As equações DGLAP levam a PDF a todos os valores de Q^2 se as funções de x são fornecidas em alguma escala inicial Q_0^2 . [18]

É possível comparar os resultados obtidos usando uma distribuição de probabilidade com diferentes conjuntos de dados, esse é o chamado *closure test*. A distribuição NNPDF3.0 é a primeira distribuição determinada com uma metodologia validada pelo closure test, isso assegura que as incertezas da metodologia são negligenciáveis em comparação a incertezas teóricas e experimentais na determinação das distribuições. Uma fonte de incerteza das distribuições é devida aos dados subjacentes (que são afetados por erros sistemáticos e estatísticos). A ideia do teste de fechamento é assumir que as distribuições subjacentes são conhecidas, e usá-las para gerar dados artificiais. Pode-se então colocar a incerteza teórica a zero (usando a mesma teoria para gerar e analisá-la) e então fixar a incerteza nos dados para qualquer valor desejado. Determinando as distribuições a partir desses dados artificiais, pode-se refinar essa metodologia até as incertezas do procedimento serem removidas (ou pelo menos pequenas o suficiente para serem indetectáveis), e a distribuição subsequente reproduz fielmente a incerteza dos dados [19].

Com os avanços das medidas no LHC e aprimoramento do entendimento teórico, a distribuição MMHT2014 surge como melhoramento da distribuição MSTW. A principal diferença entre a MSTW e a MMHT é que as incertezas correlacionadas são dadas de maneira aditiva na MSTW, enquanto que na MMHT de maneira multiplicativa. Um exemplo da distribuição MMHT14 em ordem seguinte à dominante (NLO) é dado na Fig 2.5 para os sabores: *charm* c , *strange* s , *anti up* \bar{u} , *anti down* \bar{d} , os quarks de valência u e d e a distribuição de glúons que por ser muito grande foi preciso dividir por 10. A probabilidade do glúon é dado por um fator $\ln(1/x)$, então a pequeno x ela dará um número muito grande. Para que a distribuição do glúon caiba no gráfico é necessário dividir a distribuição por 10 [20, 21].

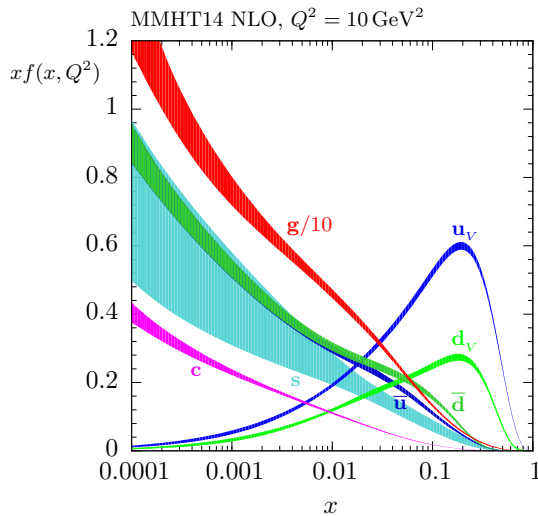


Figura 2.5: - Funções de distribuição de pártons MMHT2014 em ordem seguinte à dominante (NLO) a $Q^2 = 10 \text{ GeV}^2$ com incerteza σ (68% de nível de confiança). São mostradas as distribuições pártons de sabor *charm* c , *strange* s , *anti up* \bar{u} , *anti down* \bar{d} , os quarks de valência u e d e a distribuição de glúons que por ser muito grande foi preciso dividir por 10. - Figura retirada de [21]

2.4 Distribuições de pártons a pequeno x

Apenas a produção de J/ψ e o processo Drell–Yan a pequena massa [22] fornecem dados para a região de pequeno x , $x < 10^{-4}$, em uma escala baixa $\mu^2 \sim 2 \text{ GeV}^2$. O processo Drell–Yan consiste na formação de um par de léptons a partir de um fóton resultante da aniquilação do par quark-antiquark, como será visto com mais detalhe no Cap. 3. A região de pequeno x não é bem compreendida pois nela há forte dominância da distribuição de glúons e, por exemplo, a distribuição MSTW2008 possui valores negativos. Além disso, há uma diferença significativa na distribuição de glúons ao fazer uma análise com diferentes distribuições. Outra dificuldade em analisar essa região é que conforme aumentamos a ordem de perturbação da distribuição, a incerteza da distribuições se torna maior como mostra o gráfico da Fig. 2.6.

Essa região de pequeno x que corresponde a um intervalo de pseudorapidez medido somente pelo LHCb [22], além de não fornecer confiavelmente observáveis, possui grande incerteza na escala de fatorização. Essa incerteza teórica pode ser reduzida impondo cortes cinemáticos no momentum transversal e na pseudorapidez, como foi feito para a produção de $b\bar{b}$ na Ref. [23].

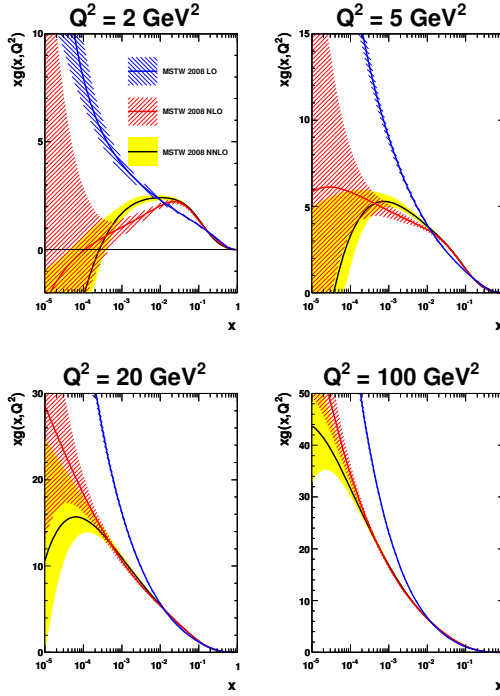


Figura 2.6: Distribuição de glúons em ordem dominante (LO) em azul, ordem seguinte à dominante (NLO) em vermelho e ordem seguinte à seguinte à dominante (NNLO) usando a distribuição a MSTW2008 com a banda de incerteza da PDF de um sigma (68%). É mostrada a evolução da distribuição com a escala $Q^2 = 2, 5, 10$ e 100 GeV^2 . Para $Q^2 = 2 \text{ GeV}^2$ a distribuição de glúons apresenta valores negativos. Figura retirada de [26]

Após os cortes, os dados para $b\bar{b}$ permitem estudar a forma da distribuição do glúon.

A maior parte das informações sobre as distribuições de pártons vêm dos experimentos de espalhamento profundamente inelástico, onde um próton é sondado pelo fóton emitido por um elétron e do processo Drell–Yan, onde o próton é sondado pelo fóton virtual resultante da aniquilação do par. Ambos são sensíveis em ordem dominante apenas às distribuições de quarks, já que os glúons presentes não possuem carga para interagir com o fóton destes processos. Logo, a distribuição de glúons não é bem conhecida em ordem dominante dos processos. Uma maneira indireta de estudar esta distribuição é por meio da variação do número de quarks com a escala, dado que as equações de evolução determinam que o crescimento da distribuição de quarks é dominado pelo desdobramento de glúons. Em termos técnicos do DIS, a funções de estrutura F_2

são compostas apenas pelas distribuições de quarks que constituem o hádron e podemos estimar a distribuição de glúons a partir da variação de F_2 com a escala de energia que é proporcional à PDF do glúon e sua função de desdobramento, que será apresentada na Seção 2.5 [27].

Se as PDFs são entendidas como probabilidades de encontrar os pártons, então distribuições negativas devem ser descartadas. Os grupos que disponibilizam PDFs com partes negativas argumentam que, para o cálculo de qualquer observável, o que se faz efetivamente é uma média ponderada sobre as várias regiões (positivas e negativas) e o resultado final é um número positivo, como deve ser todo observável. No entanto, o que pode ser mostrado [23], é que sempre haverá um observável que faz sua média apenas (ou majoritariamente) nas regiões de PDFs negativa para uma determinada PDF e, assim, teríamos um observável negativo, o que todo mundo concorda que é errado. Os grupos de PDFs com regiões negativas argumentam [28] que tal observável não é inclusivo suficiente para que a fatorização seja aplicada, contudo, isto limitaria em muito a aplicabilidade das distribuições de pártons. Nos casos da literatura, a distribuição de glúons passa a ser positiva à medida da evolução com a escala Q^2 pois, conforme fornecemos energia, os quarks possuem maior probabilidade de emitir glúons (com distribuição positiva).

2.5 Equações de Evolução DGLAP

As equações de evolução DGLAP, ou GLAP ou AP (Dokshitzer, Gribov, Lipatov, Altarelli e Parisi) dão a mudança na densidade de probabilidade de quarks e glúons com a variação da escala de energia. Ou seja, descrevem, por exemplo, a evolução da distribuição de pártons $f_f(x, Q)$ de um dado sabor f de quark a partir da emissão de pares de quark e antiquark pela distribuição de glúons $f_g(x, Q)$ [8, 29].

Altarelli e Parisi formularam equações para tratar singularidades devido à múltiplas emissões de quarks e glúons no cálculo da constante de acoplamento da força forte α_s em ordem seguinte à dominante no ano de 1977 [30]. Por isso, são chamadas de equações de Altarelli–Parisi ou simplesmente equações AP. Posteriormente, ficou-se sabendo que no mesmo ano de 1977 Dokshitzer publicou na Rússia [31] equações equivalentes. E Gribov e Lipatov já haviam publicado em 1972 [32].

Essa evolução é dada por equações integro-diferenciais para a evolução com a escala Q , do glúon, do quark e do antiquark. A evolução para o glúon deve considerar as possibilidades de um quark (ou antiquark) emitir um glúon. Essas possibilidades são dadas pelas funções de

desdobramento $P_{gq}(\frac{x}{z}, Q)$ e $P_{gg}(\frac{x}{z}, Q)$ em convolução⁵ com a distribuição:

$$Q^2 \frac{d}{dQ^2} f_f(x, Q^2) = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \left(P_{gq} \otimes \sum_f [f_f + f_{\bar{f}}] + P_{gg} \otimes f_g \right) \quad (2.14)$$

A evolução para o quark de sabor f deve considerar a probabilidade de um quark ou de um glúon emitir-lo:

$$Q^2 \frac{d}{dQ^2} f_f(x, Q) = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} (P_{qq} \otimes f_f + P_{qg} \otimes f_g) \quad (2.15)$$

Para o antiquark correspondente a evolução deve considerar a probabilidade de quark ou um glúon emitir-lo:

$$Q^2 \frac{d}{dQ^2} f_{\bar{f}}(x, Q) = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} (P_{q\bar{q}} \otimes f_{\bar{f}} + P_{qg} \otimes f_g) \quad (2.16)$$

As funções de desdobramento são dadas por:

$$P_{qq}(z) = \frac{4}{3} \left[\frac{1+z^2}{(1-z)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-z) \right] \quad (2.17)$$

$$P_{gq}(z) = \frac{4}{3} \left[\frac{1+(1-z)^2}{z} \right] \quad (2.18)$$

$$P_{qg}(z) = \frac{1}{2} [z^2 + (1-z)^2] \quad (2.19)$$

$$P_{gg}(z) = 6 \left[\frac{(1-z)}{z} + \frac{z}{(1-z)_+} + z(1-z) + \left(\frac{11}{12} - \frac{n_f}{18} \right) \delta(1-z) \right] \quad (2.20)$$

Para uma função peso não singular genérica a distribuição “+” é definida como:

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{(1-x)_+} dx = \int_0^1 \frac{f(x) - f(1)}{1-x} dx \quad (2.21)$$

o uso dessa notação organiza certas singularidades de modo que não apareçam nas integrações.

Os termos $\delta(1-z)$ vêm das correções virtuais para os diagramas de árvore de mais baixa ordem. As Eq 2.14, 2.15 e 2.16 são em ordem α_s e são denominadas geralmente como Equações DGLAP em ordem dominante. A dificuldade em calcular as equações DGLAP em ordens superiores vêm das complicações em calcular as funções de desdobramento.

As equações DGLAP são análogas a equações da função β para descrever a variação de $\alpha(Q^2)$ com a escala. Sendo que as funções de desdobramento desempenham o papel dos coeficientes b na série em α_s :

$$P(z, \alpha_s) = P^{(0)}(z) + \frac{\alpha_s}{2\pi} P^{(1)} + \dots \quad (2.22)$$

A ordem seguinte a dominante α_s^2 correspondente à 2 loops foi calculada por Curci e Furmanski.

⁵ A convolução de uma função C com uma função f é dada por: $C \otimes f = \int_x^1 \frac{dy}{y} C(y) f\left(\frac{x}{y}\right)$

[33, 34] e a ordem seguinte à seguinte à dominante foi calculada por Vogt [35] e Moch [36].

Conforme aumentamos a ordem de perturbação do processo Drell–Yan, podemos ter uma grande mudança nas funções de desdobramento⁶, em particular em P_{qg} . Em ordem seguinte à dominante a pequeno x temos uma divergência nesta função causada pelo propagador do glúon intermediário, que não se desdobra em $q\bar{q}$, fazendo com que seja necessário um número menor de glúons para promover a evolução dos quarks. Na região de $x < 10^{-4}$ em $Q^2 = 2 \text{ GeV}^2$, o efeito acima pode levar a uma PDF, ou seja uma probabilidade, de glúons negativa, mostrando a nossa ignorância nessa região.

2.6 Fator de forma de Sudakov

Em contrapartida ao desdobramento do glúon em nossa análise, temos de considerar a probabilidade de que não haja desdobramento de pártons. Isso é feito através do fator de forma de Sudakov que dá a probabilidade de um párton evoluir numa certa escala sem desdobrar em novos pártons. A inclusão desse fator é uma alternativa à prescrição “+” nas funções de desdobramento. Porém isso deixa as funções de desdobramento irregulares, representadas \hat{P} .

$$\Delta(Q^2) \equiv \exp \left[- \int_{Q_0^2}^{Q^2} \frac{dQ'^2}{Q'^2} \int dz \frac{\alpha_s}{2\pi} \hat{P}(z) \right] \quad (2.23)$$

Se a equação DGLAP for integrada a partir de uma distribuição $f(x, Q_0)$ usando esse fator, teremos:

$$f_f(x, Q^2) = \Delta(Q^2) f_f(x, Q_0^2) + \int \frac{dQ'^2}{Q'^2} \frac{\Delta(Q'^2)}{\Delta(Q^2)} \int \frac{dz}{z} \frac{\alpha_s}{2\pi} \hat{P}(z) f_f(x/z, Q'^2). \quad (2.24)$$

O primeiro termo dá a contribuição de não haver o desdobramento ao evoluir na escala de Q_0^2 a Q^2 e o segundo termo é a contribuição de todas as evoluções que tiveram desdobramento em Q'^2 . O fator $\frac{\Delta(Q'^2)}{\Delta(Q^2)}$ representa a probabilidade de evoluir de Q'^2 até Q^2 sem haver desdobramento.

Como a integral contendo a função de desdobramento é irregular ela deve ser regularizada através de um corte, $z < 1 - \varepsilon(Q^2)$. Sendo que emissões com z acima desse intervalo envolvem a emissão de um párton macio indetectável, o fator de Sudakov com esse corte dá a probabilidade de evolução sem nenhuma emissão.

Os fatores de forma de Sudakov somam contribuições virtuais (laço de pártons) e reais (emissão de pártons) para todas as ordens. As probabilidades de haver ramificação e de não

⁶As funções de desdobramento serão apresentadas na Seção 2.5.

haver são infinitas se não forem regularizadas, mas as duas somadas dão a unidade.

3 *Processo Drell–Yan*

A colisão entre prótons realizada no LHC e em outros colisores pode gerar vários estados finais a serem detectados e analisados. Uma das análises mais interessantes é o processo Drell–Yan, que consiste na colisão de um párton de um dos prótons com um párton do outro próton para a criação um bóson virtual que pode ser o Z ou o fóton que decai em um par de léptons (dilépton). Em ordem dominante, os pártons são quarks e antiquarks que se aniquilam. Na ordem seguinte à dominante, o glúon pode atuar como um dos pártons iniciais. Como os léptons interagem pela força eletrofraca, diferentemente dos pártons de estado inicial que interagem pela força forte, as interações são separadas. Ao evoluirmos as distribuições de pártons utilizadas no cálculo da seção de choque do processo Drell–Yan em ordem dominante com a DGLAP, as distribuições passam a depender da escala de fatorização e adquirem uma contribuição característica da ordem seguinte à dominante. Assim, ao analisar-se a ordem seguinte à dominante essa contribuição não deve ser contada novamente. Revisaremos o escrito acima neste capítulo.

3.1 Medidas do Drell–Yan no LHC

No processo Drell–Yan é possível medir os mais diversos observáveis associados ao dilépton como, por exemplo, a massa e o momentum transversal. Esses observáveis são medidos nos experimentos ALICE, CMS, LHCb e ATLAS do LHC. Comparado com outras medições em colisões hadrônicas, o processo Drell–Yan é detectado com muito boa precisão. Uma variável muito utilizada nestas medidas é a rapidez (longitudinal) de uma partícula, definida como:

$$y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E + p_z}{E - p_z} \right) \quad (3.1)$$

onde E é a energia e p_z o momentum longitudinal de uma dada partícula.

Medidas de seções de choque a baixas massas de dilépton a energias do LHC constituem um importante teste para o modelo padrão e, em especial, a parte não perturbativa da QCD. A análise dos dados do experimento CMS do Drell–Yan permite investigar um intervalo de massa

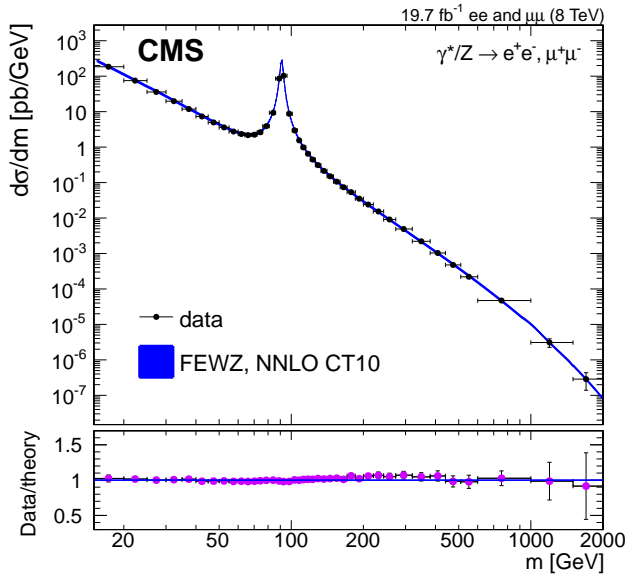


Figura 3.1: Seção de choque calculada com o software FEWZ usando a distribuição CT10 em ordem seguinte à dominante (NNLO) em azul e dados de dilépton no CMS em energia de centro do momentum de $\sqrt{s} = 8$ TeV em preto. O pico é devido a ressonância em Z, no qual a massa do bóson Z é atingida. Abaixo, a comparação entre os dados e a teoria. Figura retirada de [37].

de dilépton de 15 a 2000 GeV e uma região de fração de momentum de $0,0003 < x < 0,5$. A seção de choque diferencial tem sido medida em ótima concordância com previsões teóricas, como mostrado na Fig. 3.1 produzida pelo experimento CMS. O maior *background* consiste de estados finais com partículas decaindo por interações eletrofracas [37].

O intervalo de rapidez (para partículas com massa desprezível) para frente de $2 < y < 4,5$ é sondado apenas pelo LHCb, num intervalo de massa de dilépton de $5 < M < 120$ GeV e atingindo fração de momentum x em torno de 8×10^{-6} , em energia de centro de momentum de 7 TeV, como pode ser visto na Fig. 3.2. Os múons para serem detectados precisam ter momentum maior que 10 GeV/c e momentum transversal maior que 3 GeV/c [38]. A seção de choque foi medida em função da massa do dimuon e em função da rapidez de dimuon. A exemplo, a seção de choque diferencial em função da rapidez y para a produção de múons, $\gamma^* \rightarrow \mu\mu$, em intervalos de massa $20 < M_{\mu\mu} < 40$ e de rapidez $2 < y < 4,5$ é mostrada na

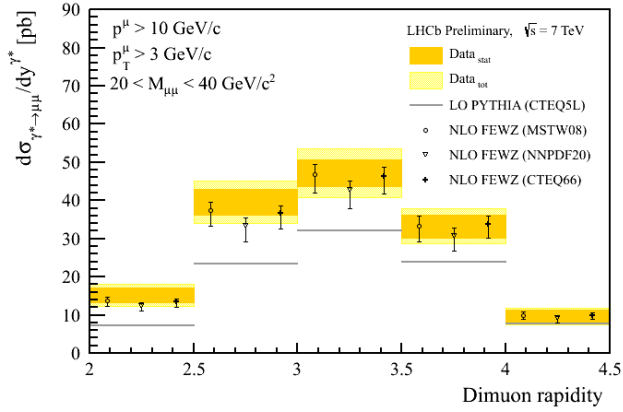


Figura 3.2: Seção de choque diferencial em função da rapidez do dimuon, com intervalo de massa $20 < M_{\mu\mu} < 40$, momentum longitudinal maiores que 10 GeV/c, momentum transversal acima de 3 GeV/c com dados do LHCb a $\sqrt{s} = 7$ TeV. As faixas em laranja correspondem às incertezas estatísticas e as amarelas às incertezas estatísticas e sistemáticas somadas. As linhas verticais correspondem a região de massa referente ao decaimento: $\Upsilon \rightarrow \mu\mu$, que não é incluída na medida. A seção de choque foi calculada usando o software FEWZ em ordem seguinte à dominante (NLO) utilizando as distribuições MSTW, NNPDF e CTEQ que são mostradas horizontalmente. Figura retira da Ref. [38].

Fig. 3.2.

Medidas na região de baixa massa invariante de dilépton, $M < 66$ GeV no ATLAS forneceram informações complementares das PDFs para a medida da ressonância Z [39]. Esses dados possibilitaram inclusive cálculos com precisão em ordem seguinte à seguinte à dominante. Foram feitas medidas exclusivas (que excluem parte dos dados) da colisão próton-próton à energia de centro de momentum de $\sqrt{s} = 7$ TeV com produção de elétrons e múons. Usando aproximação de fóton equivalente¹ a seção de choque pode ser escrita de modo que o fóton desempenha o papel de párton, e permitiu entender melhor a interação entre fótons em colisões hadrônicas [40]. Medidas do momentum transversal de léptons foram feitas a energia de centro de momentum de $\sqrt{s} = 8$ TeV [41]. Utilizou-se o método de Monte Carlo para a evolução das distribuições de momentum transversal em função da massa de dilépton e rapidez, obtendo resultados consistentes com os dados para certos intervalos de massa de léptons.

¹A aproximação de fóton equivalente consiste na propriedade do campo eletromagnético de uma partícula carregada se torna cada vez mais transversal à direção de propagação da partícula.

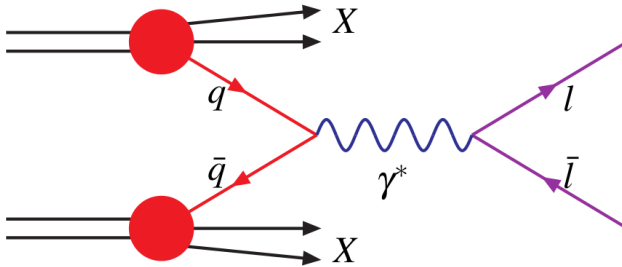


Figura 3.3: Processo Drell–Yan em ordem dominante - Colisão próton-próton (círculos vermelhos), sendo um quark, q , de um próton e um anti-quark, \bar{q} de outro próton, representados pelas linhas retas à esquerda (estado inicial) produzindo um par de léptons, representados pelas linhas retas à direita (estado final). O X de cada próton representa os constituintes que não serão considerados na colisão. O entendimento do processo se dá através de um fóton virtual, representado pela linha ondulada e pela letra γ^* – figura retirada da Ref [42].

3.2 Processo Drell–Yan em ordem dominante

A partir do modelo de párons, Sidney D. Drell e Tung-Mow Yan previram a produção de pares de léptons de grande massa resultantes de colisões inelásticas entre hádrons em altas energias [43]. A confirmação experimental das predições dos físicos foi feita já no mesmo ano de 1970 pela observação de múons massivos em colisões hadrônicas [44].

A formação de léptons analisada através do processo Drell–Yan envolve o cálculo de vários termos somados como numa série, cada parcela dessa soma é representada através de um diagrama de Feynman. Nessa série, a ordem dominante (*leading order*–LO), proporcional à α^2 , é o termo com maior contribuição, onde se considera apenas a aniquilação do quark q de um próton com o antiquark \bar{q} de outro próton, como mostrado na Fig. 3.3. Essa aniquilação resulta em um bóson virtual² Z ou fóton γ^* , que cria um lépton l e um antilépton \bar{l} , entre os léptons mais detectados nos colisores temos o múon e o elétron, mas o elétron é mais difícil de ser detectado devido à sua pequena massa.

O bóson Z interage através da força eletrofraca com o dilépton formado, enquanto que o fóton interage apenas pela força eletromagnética, o que torna mais simples analisar o processo Drell-Yan com o fóton. Podemos caracterizar o quanto uma partícula é virtual através da virtualidade: Q^2 . No nosso caso, a virtualidade é dada por $Q^2 = q^2$, onde q é o quadrimomentum do fóton. Aqui, a virtualidade é igual a massa invariante de dilépton ao quadrado M^2 e, em ordem

²Uma partícula de quadrimomentum p é virtual se não cumpre a equação de Einstein: $p^\mu p_\mu = E^2 - \vec{p}^2 = m^2$

dominante, também igual a energia relacionada às partículas de estado inicial, isto é, a energia de centro de momentum s , que é a soma dos momenta dos prótons ao quadrado. Para baixas virtualidades comparadas com a massa do bóson Z , pode-se com certeza desprezar a interação por meio deste bóson, pois pouco contribui para a formação do dilépton.

Nos colisores, um grande número de partículas são geradas na colisão entre dois feixes de hádrons. A análise dos resultados é feita através da seção de choque hadrônica que pode ser obtida a partir da seção de choque partônica. O cálculo da seção de choque partônica (feito no Apêndice A) envolve o elemento de matriz invariante, \mathcal{M} , obtido através da aplicação das regras de Feynman.

O elemento de matriz invariante em ordem dominante é calculado através da aplicação das regras de Feynman³ para o diagrama da Fig. 3.3: começando pelo linha de férmions temos o spinor para o antiquark⁴ B: \bar{v}_B^s , em seguida a regra do vértice da QED: $ie_q e \gamma^\mu$, onde e_q é a carga do quark, e e a carga elementar, sendo γ^μ as matrizes de Dirac e, finalmente para as partículas iniciais o spinor do quark A: u_A^s . Para a parte leptônica temos para o spinor do lépton C: \bar{u}_C^r , a regra para o vértice: $ie \gamma^\mu$ e para o spinor do antilépton: $v_D^{r'}$. Unindo as duas linhas de férmions com o propagador do fóton com quadrimomento q : $\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}$:

$$i\mathcal{M} = \bar{v}_B^s (ie_q e \gamma^\mu) u_A^s \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} \right) \bar{u}_C^r (ie \gamma^\nu) v_D^{r'}. \quad (3.2)$$

O elemento de matriz invariante ao quadrado, que é usado para calcular a seção de choque fica:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e_q^2 e^4}{q^4} (\bar{v}_B^s \gamma^\mu u_A^s) (\bar{u}_C^r \gamma_\mu v_D^{r'}) (\bar{v}_D^{r'} \gamma_{\mu'} u_C^r) (\bar{u}_A^s \gamma^{\mu'} v_B^s) \quad (3.3)$$

Fazendo a média sobre os spins iniciais (s, s') e somando sobre os spins finais (r, r') e substituindo o momentum do fóton pela massa invariante de dilépton:

$$\frac{1}{2} \sum_s \frac{1}{2} \sum_{s'} \sum_r \sum_{r'} |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} \frac{e_q e^2}{M^4} (\bar{v}_B^s \gamma^\mu u_A^s) (\bar{u}_C^r \gamma_\mu v_D^{r'}) (\bar{v}_D^{r'} \gamma_{\mu'} u_C^r) (\bar{u}_A^s \gamma^{\mu'} v_B^s) \quad (3.4)$$

Como o produto do tipo $\bar{u} \gamma v$ pode ser representado por uma matriz linha, uma matriz quadrada e uma matriz coluna, então resulta em um número. Podemos mover os produtos entres parênteses:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} \frac{e_q e^2}{M^4} (\bar{v}_B^s \gamma^\mu u_A^s) (\bar{u}_A^s \gamma^{\mu'} v_B^s) (\bar{u}_C^r \gamma_\mu v_D^{r'}) (\bar{v}_D^{r'} \gamma_{\mu'} u_C^r) \quad (3.5)$$

Escrevendo explicitamente os índices das representações matriciais (referentes a linha e coluna

³ Usaremos a convenção de sinais da Ref. [8]. A correspondência de cada regra para cada parte do diagrama é feito no Apêndice B.

⁴ A linha sobre a letra é para lembrar que o spinor é representado por uma matriz linha.

da matriz) da primeira metade da Eq. 3.5, faremos a soma sobre os spins dos spinores das partículas iniciais:

$$\sum_{s,s'} \bar{v}_i^{s'}(p_B) \gamma_{ij}^\mu u_j^s(p_A) \bar{u}_k^s(p_A) \gamma_{kl}^\nu v_k^{s'}(p_B) = (\not{p}_A + m)_{ii} \gamma_{ij}^\mu (\not{p}_B - m)_{jk} \gamma_{kl}^\nu \quad (3.6)$$

onde foram utilizadas as identidades que somam sobre os spins s dos spinores:

$$\sum_s u^s(p) \bar{u}^s(p) = \not{p} + m \quad \text{e} \quad \sum_s v^s(p) \bar{v}^s(p) = \not{p} - m, \quad \text{onde} \quad \not{p} = p_\mu \gamma^\mu \quad (3.7)$$

Como os índices dos elementos das matrizes vão se contraindo ao passo que o produto é feito, a Eq. 3.6 resultará numa soma com índices iguais, ou seja:

$$\sum_{s,s'} (\not{p}_A + m)_{ii} \gamma_{ij}^\mu (\not{p}_B - m)_{jk} \gamma_{kl}^\nu = \text{Tr}[(\not{p}_A + m) \gamma^\mu (\not{p}_B - m) \gamma^\nu] \quad (3.8)$$

Ao somar sobre os spins finais da segunda metade da Eq. 3.5 obtêm-se resultado análogo. Considerando as massas muito pequenas, juntamente com a propriedade cíclica do traço temos:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{8e_q^2 e^4}{M^4} \text{Tr}[\not{p}_B \gamma^\mu \not{p}_A \gamma^\mu] \text{Tr}[\not{p}_C \gamma_\mu \not{p}_D \gamma_\mu] \quad (3.9)$$

Calculando os traços e fazendo as contrações ficamos com:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{8e_q^2 e^4}{M^4} [(p_A \cdot p_C)(p_B \cdot p_D) + (p_A \cdot p_D)(p_B \cdot p_C)] \quad (3.10)$$

Usando o referencial do fóton em repouso, teremos: $\vec{p}_A + \vec{p}_B = \vec{p}_C + \vec{p}_D = 0$, sendo que o ângulo entre \vec{p}_A e \vec{p}_C é dado por θ e substituindo $e^2 = 4\pi\alpha$:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{8e_q^2 (4\pi\alpha)^2 M^4}{M^4} \frac{1}{8} [1 + \cos^2 \theta] \quad (3.11)$$

A seção de choque não integrada na distribuição angular é dada por:

$$\frac{d\hat{\sigma}}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 M^2} \left[\frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 \right] = \frac{1}{4^3 \pi^2 M^2} e_q^2 (4\pi)^2 \alpha^2 [1 + \cos^2 \theta] = \frac{e_q^2 \alpha^2 [1 + \cos^2 \theta]}{4M^2} \quad (3.12)$$

Integrando em todo o espaço de fase, a seção de choque partônica será:

$$\hat{\sigma} = \int d\Omega \frac{1}{64\pi M^2} \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 \quad (3.13)$$

Substituindo $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$:

$$\hat{\sigma} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \frac{e_q^2 \alpha^2 [1 + \cos^2 \theta]}{4M^2} = \frac{4\pi e_q^2 \alpha^2}{3M^2} \quad (3.14)$$

Essa seção de choque ainda será multiplicada pelo fator de cor. Para esse cálculo usando as seguintes representações matriciais para as 3 possíveis cores do quark:

$$r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Fazendo a correspondência com as cores $c = 1, 2, 3$ para r, g, b , já o antiquark carrega as antcores: $\bar{r}, \bar{g}, \bar{b}$, representadas por c^\dagger com as matrizes transpostas das matrizes acima. A soma das cores será dada por:

$$\sum_{c=1}^3 [c^\dagger c] [c^\dagger c] = 3 \quad (3.16)$$

Fazendo a média de cor para cada quark, teremos um fator 1/3 para cada quark. Então o fator de cor será:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \sum_{c=1}^3 [c^\dagger c] [c^\dagger c] = \frac{1}{3} \quad (3.17)$$

Então a seção de choque partônica deve ser multiplicada por 1/3.

3.3 Processo Drell–Yan em ordem seguinte à dominante

A segunda contribuição na série que iniciamos na Seção 3.2 é o processo Drell–Yan em ordem seguinte à dominante (*Next-to-Leading Order* – NLO), onde um glúon é incluído na análise, então faz-se necessário o uso da cromodinâmica quântica. Os cálculos em ordem seguinte à dominante foram feitos em 1977 por G. Altarelli, G. Parisi e R. Petronzio [45]. A ordem seguinte à seguinte à dominante (*Next-to-Next-to-Leading Order* – NNLO) que é o cálculo com correção em ordem α_s^2 foi feita em 1991 por R. Hamberg, T. Matsuura e W.L. Van Neerven [46].

Aqui, nos restringiremos ao processo Drell–Yan em ordem seguinte à dominante para investigar as decorrências da inclusão de um glúon no diagrama de Feynman estudado na Seção 3.2. Em um diagrama de Feynman, partículas à esquerda pertencem ao estado inicial, ou seja, antes de haver alguma interação e partículas à direita pertencem ao estado final, ou seja são o resultado após a interação. Todas as possibilidades de incluir um glúon no diagrama são mostrados na Fig. 3.4 onde foi omitido o decaimento do fóton virtual no dilepton. Nos diagramas

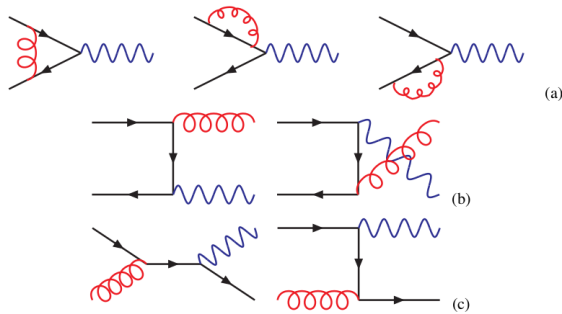


Figura 3.4: (a) Diagramas de correções virtuais, onde o glúon é interno ao diagrama. No primeiro diagrama: o quark (ou antiquark) emite um glúon que é absorvido pelo antiquark (ou quark), no segundo diagrama: o quark emite um glúon que é reabsorvido por ele e no terceiro diagrama: o antiquark emite um glúon que é reabsorvido. (b) Diagramas de aniquilação, onde um quark se aniquila com um antiquark. No primeiro diagrama o glúon é emitido pelo quark, e o fóton é emitido pelo antiquark. No segundo diagrama o fóton é emitido pelo quark e o glúon é emitido pelo antiquark (c) Diagramas de espalhamento Compton, temos o quark e o glúon como partículas no estado inicial e o fóton e o quark no estado final. Esses processos ocorrem com a soma dos momenta, no primeiro diagrama que é chamado canal s e pela transferência dos momenta, no segundo diagrama que é chamado canal t.

(a) temos as correções virtuais do vértice devido ao glúon, no primeiro diagrama: o quark (ou antiquark) emite um glúon que é absorvido pelo antiquark (ou quark), no segundo diagrama: o quark emite um glúon que é reabsorvido por ele e no terceiro diagrama: o antiquark emite um glúon que é reabsorvido.

Nos diagramas (b) temos o quark e o antiquark como partículas no estado inicial que se aniquilam, gerando um glúon e um fóton como partículas finais. No caso em que o glúon é emitido pelo quark e o fóton pelo antiquark e o contrário. A emissão do glúon faz com que o quark ou antiquark que o emitiu ganhe momentum transversal. Os diagramas (a) também são de aniquilação pois o par quark-antiquark estão no estado inicial, mas não no estado final.

Os diagramas de espalhamento Compton⁵ terão destaque nesse trabalho devido ao glúon no estado inicial como apresentadas no diagramas (c), onde temos o quark e o glúon como partículas no estado inicial e o fóton e o quark no estado final. O espalhamento Compton pode ocorrer com a soma dos momenta que é chamado de canal s e pela transferência dos momenta que é chamado de canal t. Sendo que cada canal terá um elemento de matriz invariante

⁵O nome se deve a semelhança com o espalhamento Compton, que consiste em um fóton incidindo sobre um elétron e sendo espalhado com certo ângulo.

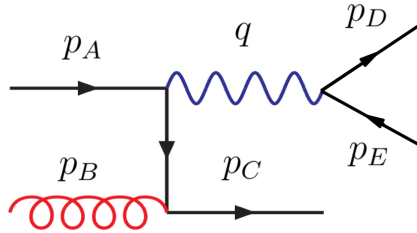


Figura 3.5: Processo Drell-Yan em ordem seguinte à dominante para o canal t do diagrama de espalhamento Compton com o decaimento do fóton no dilepton. Pártons iniciais à direita: quark A com momentum p_A e glúon com momentum p_B , propagador, linha interna, representado na vertical, pártion C e dilepton D e E, com momenta p_D e p_E respectivamente. A conexão entre a parte leptônica e a linha de férmions é feita através do fóton virtual de momentum q .

correspondente, e o espalhamento Compton será descrito ao calcularmos cada elemento e a interferência entre eles.

3.4 Espalhamento Compton

Vamos calcular a seção de choque através do canal s e do canal t dos diagramas de espalhamento Compton, que possuem o glúon como pártion inicial. Desta maneira, em regiões de pequeno x , sabe-se que o glúon domina e estes diagramas devem ter a contribuição dominante ao cálculo da seção de choque quando comparados com diagramas que apenas possuem quarks no estado inicial.

Canal t

Vamos aplicar as regras de Feynman no diagrama do canal t com o decaimento do fóton no par lépton e antilépton mostrado na Fig. 3.5. Começamos pela linha de férmions com o pártion do estado final: \bar{u}_C . Em seguida temos para o vértice do glúon: $ig_s \gamma^\rho t^a$, onde g_s é a constante de acoplamento, $t^a = \lambda^a/2$ são matrizes⁶ de índice $a = 1, 2, \dots, 8$ e para a polarização do glúon:

⁶As matrizes t^a são dadas por $t^a = \lambda^a/2$, onde λ^a são as matrizes de Gell-Mann que representam todas as configurações do glúon, mostradas no Apêndice C.

ε^ρ . A linha vertical referente a uma partícula com massa desprezível e momentum k é interna, ou seja começa e termina no diagrama, portanto representa um propagador cuja regra é dada por: $\frac{i\cancel{k}}{k^2+i\varepsilon}$. Em seguida temos o vértice da QED: $-ie_q e \gamma^\mu$. E terminamos de aplicar as regras para a linha de férmions com o outro spinor: u_A .

Para a parte leptônica, o procedimento é idêntico ao feito na ordem dominante: temos que aplicar a regra para linha externa do diagrama para cada um dos léptons separados pela regra do vértice da QED, obtendo: $[\bar{u}_E(ie\gamma^\nu)v_D]$. Unindo o a parte leptônica à linha de férmions temos o fóton como sendo o propagador: $\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2+i\varepsilon}$. Assim, o elemento de matriz invariante (ou amplitude de espalhamento) para o canal t, \mathcal{M}_t , será:

$$i\mathcal{M}_t = \left[\bar{u}_C(ig_s\gamma^\rho t^a) \left(\frac{i\cancel{k}}{k^2+i\varepsilon} \right) (-ie_q\gamma^\mu) u_A \right] \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2+i\varepsilon} \right) \varepsilon^\rho [\bar{u}_E(ie\gamma^\nu)v_D] \quad (3.18)$$

Considerando ε muito pequeno e substituindo o momentum do fóton ao quadrado pela massa invariante de dilépton ao quadrado, a densidade de probabilidade é obtida multiplicando o elemento de matriz invariante pelo seu complexo conjugado:

$$|\mathcal{M}_t|^2 = -\frac{e^4 g_s^2 t^a (t^a)^\dagger}{k^4 M^4} [\bar{u}_C \gamma^\rho \cancel{k} \gamma^\mu u_A \bar{u}_A \gamma^{\mu'} \cancel{k} \gamma^{\rho'} u_C] g_{\mu\nu} \times [\bar{u}_E \gamma^\nu v_D \bar{v}_D \gamma^{\nu'} u_E] g_{\mu'\nu'} \quad (3.19)$$

O fator de cor é dado pela média das cores iniciais multiplicado pela soma de todas as cores finais. O traço do produto $t^a(t^a)^\dagger$ é igual ao produto do número de cores $N_C = 3$ pelo operador de Casimir $C_F = 4/3$: $N_C C_F$ resultando em 4, conforme calculado à força bruta no Apêndice C. O fator de cor total ainda inclui a divisão por 8 e por 3 que vem das médias sobre as cores iniciais, com resultado final 1/6. Fazendo a soma sobre os spins finais, a média sobre os spins iniciais e usando as mesmas identidades da Seção 3.2, temos que o elemento de matriz invariante ao quadrado se torna:

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{24} \sum_{\text{spins, cores}} |\mathcal{M}_t|^2 = -\frac{g_s^2 e^4}{24 k^4 M^4} \text{Tr}[\gamma^\rho \cancel{k} \gamma^\mu \not{p}_A \gamma^{\mu'} \cancel{k} \gamma^{\rho'} \not{p}_C] g_{\mu\nu} \text{Tr}[\gamma^\nu \not{p}_D \gamma^{\nu'} \not{p}_E] g_{\mu'\nu'} \quad (3.20)$$

Calculando os traços teremos e substituindo os valores: $g_s^2 = 4\pi\alpha_s$ e $e^2 = 4\pi\alpha$ teremos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{24} \sum_{\text{spins, cores}} |\mathcal{M}_t|^2 = & -\frac{(4\pi)^3 \alpha^2 \alpha_s}{24 k^4 M^4} 64 [2(k \cdot p_C)(k \cdot p_E)(p_A \cdot p_D) + 2(k \cdot p_C)(k \cdot p_D)(p_A \cdot p_E) - \\ & - k^2(p_C \cdot p_E)(p_A \cdot p_D) - k^2(p_C \cdot p_D)(p_A \cdot p_E)] \end{aligned} \quad (3.21)$$

Pelo princípio de conservação de momento, temos que o momentum do lépton é dado pela diferença entre o momentum do fóton e o momentum do antilépton:

$$p_E = q - p_D \quad (3.22)$$

Já a outra partícula do estado final, párton C, terá momentum dado pela soma dos momenta dos pártons iniciais subtraídos do momentum carregado pelo fóton:

$$p_C = p_A + p_B - q \quad (3.23)$$

A troca de momentum entre o párton A e o párton B é dado pelo que sobra do momentum do párton A após a emissão do fóton. Ou seja, pela diferença entre o momentum do párton A e o momentum do fóton:

$$k = p_A - q \quad (3.24)$$

Como o p_B é o quadrimomentum do glúon, que não tem massa, temos que:

$$p_B^2 = 0 \quad (3.25)$$

Considerando as partículas na camada de massa, temos que $p^2 = m^2$. E também que essa massa muito pequena $m \approx 0$. Temos:

$$p_A^2 \approx 0, p_C^2 \approx 0, p_D^2 \approx 0 \quad (3.26)$$

As variáveis de Mandelstam para $p_A, p_B \rightarrow p_C, q$ são, com a massa de dilépton dada pelo quadrimomentum do fóton ao quadrado: $q^2 = M^2$. A soma dos momenta dos pártons A e B:

$$\hat{s} = (p_A + p_B)^2 = (p_C + q)^2 \approx 2p_A \cdot p_B = M^2 + 2q \cdot p_C \quad (3.27)$$

A transferência de momentum entre os pártons A e B:

$$\hat{t} = (p_A - q)^2 = (p_B - p_C)^2 \approx -2p_A \cdot q + M^2 = -2p_B \cdot p_C \quad (3.28)$$

E a variável de Mandestam \hat{u} :

$$\hat{u} = (p_A - p_C)^2 = (p_B - q)^2 \approx -2p_A \cdot p_C = -2p_B \cdot q + M^2 \quad (3.29)$$

Substituindo os momenta p_E , k e as variáveis de Mandelstam na densidade de probabilidade, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{24} \sum_{\text{spins, cores}} |\mathcal{M}_t|^2 = & -\frac{512}{3} \frac{\pi^2 \alpha^2 \alpha_s}{M^4 t} (-4(p_A \cdot p_D)(p_B \cdot p_D) + (p_B \cdot p_D)M^2 + \\ & + t[(p_A \cdot p_D) - (p_B \cdot p_D)] + s(p_B \cdot p_D)). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Com esse resultado encerramos 1/3 do caminho para calcular a seção para o espalhamento Compton. Agora, teremos de calcular a contribuição do canal s e posteriormente a interferência dos dois canais.

Canal s e interferência

Para calcular a seção de choque para os diagramas Compton é necessário considerar as duas maneiras como o processo pode ocorrer, através dos canais s e t. Na seção anterior calculamos o canal t, onde as partículas iniciais são: o quark (párton A) que emite um fóton e o glúon (párton B). Nesse diagrama o quark transfere momento para o glúon, caracterizando assim o canal t, cujo elemento de de matriz \mathcal{M}_t é dado através da aplicação das regras de Feynman.

Outra possibilidade é que o momento do quark (párton A) é somado ao momento do glúon, caracterizando o canal s. Nesse caso, calculamos o elemento de matriz \mathcal{M}_s , novamente aplicando as regras de Feynman.

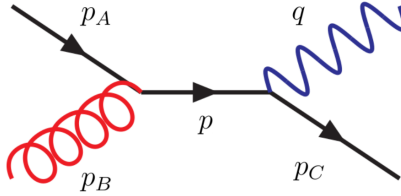


Figura 3.6: Diagrama da contribuição do canal s, com partículas iniciais: o párton A de momento p_A e o glúon com momento p_B . Com partículas finais: o fóton que irá gerar o dilépton e o párton C de momento p_C . Entre as partículas finais, um propagador de momento p .

Seguindo a linha de férmions, aplicamos a regra para o spinor, em seguida para o vértice da QED, a regra para o propagador com momento p , em seguida para o vértice da QCD considerando a polarização do glúon e finalmente o spinor para o párton A:

$$\left[\bar{u}_C(i e_q e \gamma^{\mu'}) \left(\frac{i \not{p}}{p^2 + i\epsilon} \right) (i g_s \gamma^{\rho'} t^a) \varepsilon_{\rho'} u_A \right] \quad (3.31)$$

Como foi feito no canal t é necessário incluir a parte leptônica que é a mesma para os dois canais.

$$\mathcal{M}_s = \left[\bar{u}_C(i e_q e \gamma^{\mu'}) \left(\frac{i \not{p}}{p^2 + i\epsilon} \right) i g_s \gamma^{\rho'} t^a \varepsilon_{\rho'} u_A \right] \left(\frac{-i g_{\mu' \nu'}}{q^2 + i\epsilon} \right) [\bar{u}_E(i e \gamma^{\nu}) v_D] \quad (3.32)$$

Multiplicando o elemento de matriz invariante pelo seu complexo conjugado temos, e seguindo o mesmo procedimento da Seção 3.4:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{24} \sum_{\text{spins, cores}} |\mathcal{M}_s|^2 = & \frac{256 \pi^3 \alpha^2 \alpha_s^2 e_q^2}{3 p^4} \left\{ -\frac{4}{M^4 s} [(p_A \cdot p_D)(p_B \cdot p_D) + (p_B \cdot p_D)^2] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{M^2 s} [(p_A \cdot p_D) + 3(p_B \cdot p_D)] - \frac{u}{M^4 s} [(p_A \cdot p_D) + 2(p_B \cdot p_D)] - \frac{t}{M^4 s} (p_B \cdot p_D) \right\} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Agora que temos as contribuições do canal s $|\mathcal{M}_s|^2$ do canal t $|\mathcal{M}_t|^2$ individualmente, nos resta calcular a interferência entre eles. O produto cruzado $\mathcal{M}_t \mathcal{M}_s^*$ somado com seu complexo conjugado dará apenas a parte real do produto. Então o elemento de matriz invariante para o espalhamento Compton será:

$$|\mathcal{M}|^2 = |\mathcal{M}_s|^2 + 2\text{Re}\{\mathcal{M}_t \mathcal{M}_s^*\} + |\mathcal{M}_t|^2 \quad (3.34)$$

Substituindo o elemento de matriz invariante para o canal t (Eq.3.18), para o canal s (Eq. 3.32), e o módulos ao quadrado para o canal t (Eq. 3.30), e para o canal s (Eq. 3.33), teremos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{24} \sum_{\text{spins, cores}} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{256\pi^3 \alpha^2 \alpha_s e_q^2}{3} \left\{ \frac{8}{st} [-8(p_A \cdot p_D)(p_B \cdot p_D) - 8(p_A \cdot p_D)^2 - 4(p_B \cdot p_D)^2] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{M^2}{st} [4(p_A \cdot p_D) + 2(p_B \cdot p_D)] - \frac{2}{s} (p_A \cdot p_D) + \frac{2}{t} [(p_A \cdot p_D) + (p_B \cdot p_D)] - \frac{M^2}{t} \right\} \end{aligned} \quad (3.35)$$

A seção de choque partônica encontrada na literatura em função das variáveis de Mandelstam que usaremos para falar sobre as divergências é:

$$\frac{d\hat{\sigma}}{dt dM^2} = \frac{1}{9} \frac{\alpha^2 \alpha_s e_q^2}{M^2 s^2} \left(\frac{2M^2 u^2 + s^2 + t^2}{-st} \right) \quad (3.36)$$

Antes de tratarmos a seção de choque partônica do espalhamento Compton, voltaremos à análise de todos os diagramas do processo Drell–Yan em ordem seguinte à dominante, Fig. 3.4, discutindo suas divergências.

3.5 Divergências do processo Drell–Yan em ordem seguinte à dominante

Em ordem seguinte à dominante todos os diagramas da Fig. 3.4 terão divergências quando a seção de choque diferencial for integrada no momentum transversal. Teremos três tipos de divergências: a ultravioleta, a infravermelha e a colinear. A divergência ultravioleta está relacionada com o limite superior da integral em momentum que é devido a presença dos laços dos diagramas (a) da Fig. 3.4. A divergência infravermelha da integral está relacionada à emissão de glúons macios nos diagramas (b) da Fig 3.4 ou à presença de laços. E a divergência colinear ocorre quando o quark emite um glúon colinear à ele, ou quando o glúon emite um par quark e antiquark sendo que um dos dois é colinear ao glúon. Há também uma divergência colinear

que pode vir dos diagramas de laço, quando o quark emite um glúon colinear que é absorvido novamente.

Para lidarmos com essas divergências, fazemos a regularização e a renormalização. A regularização consiste em tornar essas integrais divergentes, irregulares, em integrais regulares. A renormalização consiste em redefinir os parâmetros envolvidos de maneira que eles absorvam os termos divergentes. Um dos métodos de regularização mais utilizados é a regularização dimensional que consiste em mudar a dimensão de uma integral divergente em $d = 4$ dimensões, de modo que ela seja regular em $4 - 2\epsilon$ dimensões. Após regularizar e somar todos os diagramas da Fig. 3.4 apenas as divergências colineares permanecem.

O cancelamento da divergência infravermelha pode ser explicado pelo fato de um glúon (macio) possui momentum tão pequeno que não pode ser detectado por nenhum experimento. Já a divergência colinear permanece por complicações relacionadas ao domínio de distância no qual pode-se aplicar a cromodinâmica quântica perturbativa. Lidamos com essas complicações através da fatorização, onde as divergências são absorvidas nas funções de distribuição de pártons.

3.6 Fatorização

A fatorização surge para resolver o problema de como calcular uma seção de choque em altas energias para separar efeitos de curta distância de feitos de longa distância, de modo que a análise da cromodinâmica quântica perturbativa ainda seja válida. Em séries perturbativas, após a renormalização, qualquer grandeza física acaba sendo função da escala de renormalização μ_R , que possui dimensão de massa.

No nosso caso, a fatorização consiste em inserir a divergência colinear em um termo dentro da distribuição de pártons em uma certa escala μ_F . Isso é feito através do esquema⁷ $\overline{\text{MS}}$ no qual os pólos $1/\epsilon$ e os termos $\ln 4\pi - \gamma_E$ são absorvidos nas distribuições de pártons. A fatorização é feita explicitamente⁸ na Ref. [48], onde a distribuição de pártons é escrita como uma distribuição nua, PDF_0 que depende só da fração de momentum x somada a uma parte que depende de x e de uma escala de fatorização μ_F :

$$\text{PDF}(x, \mu) = \text{PDF}_0(x) + \alpha_s \left(-\frac{1}{\epsilon} - \ln(4\pi) + \gamma_E \right) \times \text{DGLAP}(x, \mu_F) \quad (3.37)$$

onde γ_E é a constante de Euler-Mascheroni. Como as equações DGLAP são dadas por convolu-

⁷Esquema de subtração mínima modificada

⁸Uma leitura mais acessível recomendada é a Ref. [47].

ções da distribuição de pártons com a função de desdobramento, a dependência com a escala da função de distribuição é inserida através das equações DGLAP e a divergência $1/\varepsilon$ é absorvida na função de distribuição através de uma escala de fatorização.

A escala de fatorização μ_F também pode ser usada para controlar a separação do que é atribuído à distribuição de pártons do que é atribuído ao elemento de matriz invariante, através da virtualidade q^2 dos pártons. Contribuições de baixa virtualidade $q^2 < \mu_F^2$ são atribuídas à distribuição de pártons enquanto que contribuições com virtualidade $q^2 > \mu_F^2$ são atribuídas ao elemento de matriz invariante.

Ao integrarmos as equações de evolução DGLAP temos uma divergência em ordem seguinte devido ao fator $1/t$ da função de desdobramento do glúon em quarks P_{qg} . A importância dessa função de desdobramento foi discutida na Seção 2.4 a respeito da região de pequeno x e é a base para o entendimento desse trabalho, quando discutiremos a fatorização da seção de choque usando uma escala de fatorização ótima.

Para energias do LHC de 7 TeV há grande incerteza na escala de fatorização. Foi mostrado na Ref. [23] que essa incerteza pode ser reduzida na produção de par $b\bar{b}$ se for feito um corte no momentum transversal, o corte permitiu também investigar a região de pequeno x onde a distribuição de glúons tem forte contribuição. A maior fonte de incerteza vem do termo logarítmico $\ln(1/x)$ a pequeno x na aproximação colinear em ordem seguinte à dominante. Ao diminuir a escala de fatorização, glúons que eram atribuídos à distribuição de pártons passam a ser atribuídos ao elemento de matriz invariante, porém apenas um glúon é permitido no elemento de matriz invariante devido à aplicação das regras de Feynman. Isso estraga o balanço entre a PDF e o elemento de matriz que deveria dar estabilidade na variação da escala.

Veremos nesse capítulo, como ainda é possível trabalhar com a escala de fatorização de maneira que a análise seja consistente, para tanto primeiramente é preciso mostrar como se dá a inserção da escala de fatorização no contexto do processo Drell–Yan em ordem dominante e em ordem seguinte à dominante.

3.7 Contribuição de cada ordem de perturbação

Em valores pequenos de escala de fatorização, o subprocesso da ordem seguinte à dominante, $g\bar{q} \rightarrow q\gamma^*$, com o glúon no estado inicial chega a ter contribuição maior que o processo em ordem dominante $q\bar{q} \rightarrow \gamma^*$ devido à dominância da PDF do glúon à pequeno x . Nessa região, a probabilidade de emitir um párton em um intervalo $\Delta\mu_F$ é reforçada por um grande valor de

$\ln(1/x)$. O número médio de párton num intervalo $\Delta\mu_F$ é:

$$\langle n \rangle \simeq \frac{\alpha_s N_c}{\pi} \ln(1/x) \Delta \ln \mu_F^2 \quad (3.38)$$

levando à um valor de $\langle n \rangle$ de até 8, para o caso de $\ln(1/x) \sim 8$ e variação usual da escala com a massa de dilépton M de $M/2$ até $2M$. Por outro lado, o elemento de matriz em NLO permite a emissão de apenas um párton, não sendo possível uma compensação entre a PDF e o elemento de matriz.

Agora vamos investigar como a contribuição do glúon afeta a seção de choque já em ordem dominante, se as PDFs forem evoluídas com a DGLAP. A seção de choque em ordem dominante pode ser escrita esquematicamente, com a distribuição de pártons, de cada próton, como função da escala de fatorização μ_F e pela função coeficiente C^{LO} , que é o elemento de matriz invariante integrado e não depende da escala de fatorização:

$$\sigma(\mu_F) = \text{PDF}(\mu_F) \otimes C^{LO} \otimes \text{PDF}(\mu_F). \quad (3.39)$$

Usando as equações DGLAP para evoluir a PDF a partir de uma escala m até μ_F têm-se uma contribuição logarítmica em ordem dominante em α_s (*leading logarithmic approximation* – LLA) que pode ser expressa como [24, 25]:

$$\sigma^{LO}(\mu_F) = \text{PDF}(m) \otimes \left[C^{LO} + \frac{\alpha_s}{2\pi} \ln\left(\frac{\mu_F^2}{m^2}\right) \times (P_{\text{left}} C^{LO} + C^{LO} P_{\text{right}}) \right] \otimes \text{PDF}(m) \quad (3.40)$$

onde as funções de desdobramento:

$$P_{\text{right}} = P_{qq} + P_{qg} \quad \text{e} \quad P_{\text{left}} = P_{\bar{q}\bar{q}} + P_{\bar{q}g} \quad (3.41)$$

atuam na PDF da direita e da esquerda respectivamente.

Já a seção de choque em ordem seguinte à dominante pode ser expressa com uma função coeficiente que não depende de μ_F :

$$\sigma^{NLO}(\mu_F) = \text{PDF}(\mu_F) \otimes [C^{LO} + \alpha_s C_{\text{corr}}^{NLO}] \otimes \text{PDF}(\mu_F) \quad (3.42)$$

onde incluímos as correções em ordem seguinte à dominante, C_{corr}^{NLO} , que são calculadas com precisão melhor do que a aproximação logarítmica dominante pois a inclusão do glúon na análise é feita diretamente através da aplicação das regras de Feynman no cálculo de C_{corr}^{NLO} . Os subprocessos envolvidos no cálculo de C_{corr}^{NLO} são: $q\bar{q} \rightarrow g\gamma^*$ e $gq \rightarrow q\gamma^*$ os mesmos da função de desdobramento P_{left} , incluída na ordem dominante, Eq. 3.40, portanto é necessário subtrair essa contribuição para não a consideramos duas vezes na Eq. 3.42.

Após a subtração, a função coeficiente remanescente C_{rem}^{NLO} passa a depender de μ_F . Como resultado, mudar μ_F redistribui as correções em ordem α_s entre as partes em LO e a NLO:

$$\sigma^{NLO}(\mu_F) = \text{PDF}(\mu_F) \otimes [C^{LO} + \alpha_s C_{\text{rem}}^{NLO}] \otimes \text{PDF}(\mu_F) \quad (3.43)$$

Pode-se escolher uma escala de fatorização ótima $\mu_F = \mu_0$ de modo a minimizar C_{rem}^{NLO} . Ou seja, incluímos a contribuição em NLO no segundo termo da LO, onde os termos vindos da PDF são reforçados por $\alpha_s \ln(1/x)$.

4 *Cálculo da escala de fatorização ótima*

Com a revisão feita no Cap. 2 a partir da cromodinâmica quântica até as distribuições de pártons estávamos em condições de compreender o processo Drell–Yan em ordem dominante e em ordem seguinte à dominante no Cap. 3, onde foi visto que se as funções de distribuição de pártons da ordem dominante forem evoluídas com as equações DGLAP, elas passam a depender da escala de fatorização. Pode-se calcular uma escala de fatorização ótima, que insere contribuições de ordem seguinte à dominante dentro da ordem dominante. Dessa maneira, reduz-se a incerteza teórica do processo Drell–Yan em ordem dominante. Neste capítulo mostraremos como se obtém a escala de fatorização ótima.

4.1 Cálculo da escala fatorização ótima

Em uma análise perturbativa, ao passo que adicionamos contribuições, melhor ela se torna. Assim, para o caso do Drell–Yan, temos que a ordem seguinte à dominante é uma melhora da ordem dominante pois descreve as colisões hadrônicas com uma correção de ordem α_s^2 devido à inserção do glúon na análise. Porém, pode-se incorporar contribuições de ordem seguinte à dominante já em ordem dominante através da escala de fatorização ótima.

Como o elemento de matriz invariante é calculado exatamente através da aplicação das regras de Feynman, escolhe-se um limite superior na escala de fatorização μ_0 da integração da DGLAP de modo que o valor da integral se torne igual ao resultado do elemento de matriz invariante. Mas isso não pode ser feito para todos os subprocessos simultaneamente com um valor de μ_F comum, por isso temos que escolher a escala de fatorização μ_F do subprocesso com maior contribuição.

Para o processo Drell–Yan a pequeno x , grande parte da produção do par quark/antiquark vem do desdobramento do glúon, então o subprocesso mais importante é $gq \rightarrow q\gamma^*$ (Espalha-

mento Compton), cuja seção de choque escrita com as variáveis de Mandelstam é:

$$\frac{d\hat{\sigma}(gq \rightarrow q\gamma^*)}{dM^2 dt} = \frac{1}{9} \frac{\alpha^2 \alpha_s}{M^2 \hat{s}^2} \left[-\frac{\hat{s}}{t} - \frac{t}{\hat{s}} - \frac{2M^2 u}{\hat{s}t} \right] \quad (4.1)$$

$$= \frac{\alpha^2 \alpha_s z}{9M^4} \frac{1}{t} \left[((1-z)^2 + z^2) + z^2 \frac{t^2}{M^4} - 2z^2 \frac{t}{M^2} \right] \quad (4.2)$$

onde $u = M^2 - \hat{s} - t$ e $z = M^2/\hat{s}$, sendo M a massa do dilépton. O limite superior para $|t|$ é:

$$|t_1| = \hat{s} - M^2 = (1-z)M^2/z, \quad (4.3)$$

Na Eq. 4.2, notamos o termo: $(1-z)^2 + z^2$ semelhante à função de desdobramento do glúon no par quark/antiquark das equações DGLAP Eq. 2.19. Então a maior contribuição vem do desdobramento do glúon em quark/antiquark. O termo em ordem α_s da contribuição DGLAP para o desdobramento: $g \rightarrow q\bar{q}$ é:

$$\frac{d\sigma(gq \rightarrow q\gamma^*)}{dM^2 dt} = \frac{\alpha^2 \alpha_s z}{9M^4} \frac{1}{t} [z^2 + (1-z)^2]. \quad (4.4)$$

Integrando a seção de choque em ordem seguinte à dominante (Eq.4.2) de t_0 até t_1 e a DGLAP (Eq. 4.4) de t_0 até μ_0 , e escolhendo μ_0 de modo que as duas integrais se igualem, temos:

$$z [z^2 + (1-z)^2] \ln \frac{\mu_0^2}{|t_0|} = z \left[((1-z)^2 + z^2) \left(\ln \frac{M^2}{|t_0|} + \ln \frac{1-z}{z} \right) + \frac{1+3z}{2} (1-z) \right], \quad (4.5)$$

onde a divergência infravermelha se cancela, quando $t_0 \rightarrow 0$. Depois de integrar a Eq.4.5 sobre o fluxo de quarks, dz/z encontramos a escala ótima como:

$$\ln \frac{\mu_0}{M} = \frac{3}{8}, \quad \text{que é } \mu_0 = 1.45M. \quad (4.6)$$

É possível verificar que a integral da contribuição da DGLAP em convolução com C^{LO} até a escala de fatorização ótima $\mu_0 = 1,45M$ reproduz o valor da contribuição do subprocesso da ordem seguinte à dominante, $C_{\text{corr}}^{\text{NLO}}$. Como pode ser visto na Fig. 4.1(b), para a escala de fatorização ótima $\mu_0 = 1,4M$ a seção de choque em ordem seguinte à dominante fica indistinguível para diferentes valores de escala de fatorização μ_F na distribuição PDF(μ_F). As predições usaram o conjunto de PDFs MSTW2008 NLO.

Após a soma de várias ordens perturbativas, as predições finais devem ser muito menos sensíveis a escolha de μ_F usada para separar a PDF precedente do elemento de matriz invariante como mostra a Fig. 4.1(a). As escalas de fatorização usadas são: $\mu = M/2, M, 2M$ para LO, NLO e NNLO, onde M é a massa de dilépton. O espaçamento entre as curvas em LO são gigantes, grandes entre as curvas em NLO e ainda apreciáveis em NNLO demonstrando forte

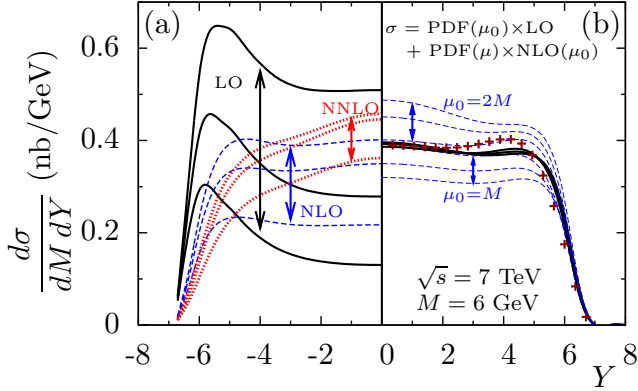


Figura 4.1: (a) Sensitividade da produção Drell-Yan de $\mu^+\mu^-$ no LHC a energia de 7 TeV, em função da rapidez Y , na escolha da escala de fatorização $\mu_F = M/2, M, 2M$, em LO, NLO, NNLO (b) As linhas contínuas são os resultados para $\mu = M/2, M, 2M$. As linhas tracejadas mostram que a estabilidade desaparece para outras escolhas de μ_0 . As cruzes pequenas são para NNLO. Figura retirada de [49].

sensibilidade à μ_F .

A escala ótima pode ser calculada para atribuir diferentes contribuições em ordem seguinte à dominante na ordem dominante. Por exemplo, a escala ótima para considerar os diagramas de aniquilação é diferente da escala ótima para considerar os diagramas de espalhamento Compton das contribuições em ordem seguinte à dominante. Ao alterar a escala ótima muda-se qual contribuição em ordem seguinte à dominante será levada em conta.

4.2 Corte no momentum transversal

Na Ref. [49] mostrou-se que a escolha na escala ótima pode ser melhorada impondo um corte no momentum transversal do dilépton k_t de modo a diminuir a escala de fatorização ótima, permitindo sondar regiões de pequeno x .

Na aproximação colinear, o momentum transversal é gerado pelos subprocessos em ordem seguinte à dominante: $q\bar{q} \rightarrow g\gamma^*$ e $qg \rightarrow q\gamma^*$. Repetindo o procedimento da Seção 4.1, primeiro calcula-se a seção de choque do subprocesso $qg \rightarrow q\gamma^*$, Eq. 4.2, mas em termos do momentum transversal k_t . Escrevendo primeiro a variável de Mandelstam t em termos do momentum

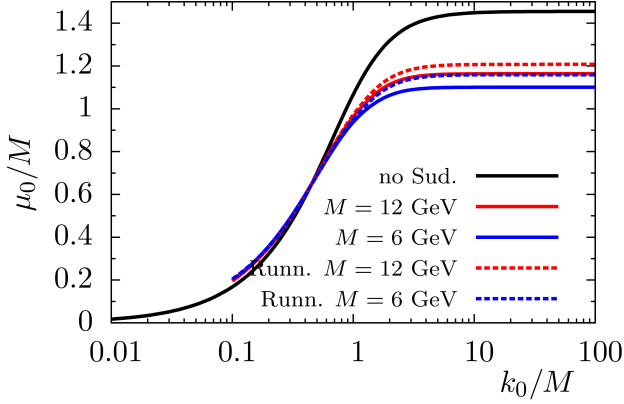


Figura 4.2: Dependência da escala ótima μ_0 com a escolha do corte no momentum transversal, k_t do processo Drell-Yan produzindo o par de múons de massa M . As curvas com $k_0/M > 0.1$ mostram como incluir o fator de Sudakov, com e sem o parâmetro de acoplamento α_s , muda a dependência da escala ótima μ_0 com o corte k_0 [49].

transversal :

$$-t = \frac{1}{2} \left[\hat{s} - M^2 \pm \sqrt{(\hat{s} - M^2)^2 - 4\hat{s}k_t^2} \right], \quad \text{dando} \quad dt = \pm \frac{\hat{s}}{\sqrt{(\hat{s} - M^2)^2 - 4\hat{s}k_t^2}} dk_t^2. \quad (4.7)$$

substituindo t na seção de choque Eq. 4.2 e integrando no momentum transversal k_t^2 e integrando nos limites de correspondentes a t_0 e t_1 .

Então iguala-se com o elemento de matriz em ordem dominante em convolução com a DGLAP em ordem dominante, Eq. 4.4, até uma escala ótima μ_0 , o que gera um termo extra que é função de z e do momentum transversal $\mathcal{J}(z, k_0)$:

$$\mathcal{J}(z, k_0) = \Theta(z_{\max} - z) \left[2(1 + 2z^2 - 2z) \tanh^{-1} \left(\sqrt{1 - \frac{4z}{(1-z)^2} \frac{k_0^2}{M^2}} \right) + \frac{1+3z}{2} \sqrt{(1-z)^2 - 4z \frac{k_0^2}{M^2}} \right] \quad (4.8)$$

A função de Heaviside, $\Theta(z_{\max} - z)$, garante que o corte não seja abaixo do valor máximo que o momentum transversal pode ter, esse valor máximo é dado pelo quanto de momentum longitudinal dos pártons iniciais foi transformado em momentum transversal. Agora o valor calculado para essa escala de fatorização ótima, $\mu_0 = \mu_0(k_0)$, depende do corte no momentum transversal k_t devido ao termo $I(z, k_0)$ essa escala continua desempenhando o papel de incluir em ordem dominante a contribuição do subprocesso $qg \rightarrow q\gamma^*$ da ordem seguinte a dominante, mas com a vantagem de agora podermos escolher o valor do corte do momentum transversal k_0 ,

como pode ser visto na Fig. 4.2.

O corte restringe o número de eventos considerados, diminui a escala ótima e possibilita sondar regiões de escala menor, fazendo com que seja possível restringir quais contribuições em ordem seguinte à dominante serão levadas em consideração. No caso de baixas escalas na região de pequeno x os diagramas de espalhamento Compton fornecem uma contribuição maior devido ao glúon no estado inicial.

4.3 Cálculo da seção de choque partônica

Para cálculo de outros cortes, é interessante estudar o espaço de fase completo do dilépton, assim como reproduzir a Eq. 3.36. A seção de choque partônica é dada pelo elemento de matriz invariante integrado sobre o espaço de fase dos momenta dos estados finais, conforme mostrado no Apêndice A. Para o processo Drell–Yan em ordem seguinte à dominante, além da formação do dilépton, temos o párton C no estado final, como mostrado no diagrama da Fig. 3.5:

$$\hat{\sigma} = \int \frac{1}{F} \frac{d^3 p_C}{(2\pi)^3 2E_C} \frac{d^3 p_D}{(2\pi)^3 2E_D} \frac{d^3 p_E}{(2\pi)^3 2E_E} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_C + p_D + p_E - p_A - p_B) |\mathcal{M}|^2 \quad (4.9)$$

onde usando a aproximação colinear, o fator de fluxo será:

$$F = \left| \left(\frac{p_{Az}}{E_A} - \frac{p_{Bz}}{E_B} \right) \right|. \quad (4.10)$$

Como o párton C não é observado livremente, devemos integrar por todo o espaço dos momenta, garantindo que consideramos todas as possibilidades de interação do párton C. Dessa maneira, o processo será inclusivo para o párton C, ou seja, inclui todas as possibilidades para o párton C no espaço dos momenta. Se excluíssemos alguma possibilidade o processo seria denominado exclusivo para o párton C.

O resultado da seção de choque partônica será inserido na Eq. 2.9 em termos dos observáveis rapidez y e a massa de dilépton M^2 . Para isso, utilizaremos um operador identidade no espaço de fase, que é dado por integrais que consideram todos os possíveis valores de momentum e deltas que garantem a conservação de momentum:

$$\int dq_0 dq_z \delta(q_0 - E_D - E_E) \delta(q_z - p_{Dz} - p_{Ez}) = 1. \quad (4.11)$$

Sendo que o quadrimomentum do fóton gera a massa do dilépton, temos que:

$$M^2 = q^2 = q_0^2 - \vec{q}^2 = M^2(q_0, |\vec{q}|). \quad (4.12)$$

E a rapidez é definida como:

$$y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{q_0 + q_z}{q_0 - q_z} \right) = y(q_0, q_z) \quad (4.13)$$

Podemos calcular o jacobiano para $dq_0 dq_z \rightarrow dM^2 dy$ para que o elemento de integração em termos da energia do fóton e do momentum longitudinal, $dq_0 dq_z$, possa ser substituído pelo elemento de integração dos observáveis M^2 e y .

$$\frac{dM^2 dy}{dq_0 dq_z} = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial M^2}{\partial q_0} & \frac{\partial M^2}{\partial q_z} \\ \frac{\partial y}{\partial q_0} & \frac{\partial y}{\partial q_z} \end{array} \right| = 2 \quad (4.14)$$

Inserindo a seção de choque partônica (Eq. 4.9) na seção de choque hadrônica Eq. 2.9 obtemos a seção de choque hadrônica, que é obtida experimentalmente:

$$\sigma = \frac{1}{8(2\pi)^5} \int \frac{1}{F} \frac{d^3 p_C}{E_C} \frac{d^3 p_D}{E_D} \frac{d^3 p_E}{E_E} dx_A dx_B \delta^{(4)}(p_C + p_D + p_E - p_A - p_B) |\mathcal{M}|^2 f(x_A) f(x_B) \quad (4.15)$$

4.3.1 Integral no momentum transversal do párton C

O primeiro passo é integrar no momentum transversal \vec{p}_{Ct} , com o uso de duas das quatro deltas que mantêm a conservação de momentum:

$$\vec{p}_{Ct} = \vec{p}_{At} + \vec{p}_{Bt} - \vec{p}_{Dt} - \vec{p}_{Et} \quad (4.16)$$

Na aproximação colinear, os hádrons têm apenas momentum longitudinal, então $\vec{p}_{At} = \vec{p}_{Bt} = 0$. E o momentum transversal do párton C é dado por:

$$\vec{p}_{Ct} = -\vec{p}_{Dt} - \vec{p}_{Et}. \quad (4.17)$$

Restando a delta da energia e a delta do momentum longitudinal na seção de choque hadrônica:

$$\begin{aligned} \sigma = & \frac{1}{8(2\pi)^5} \int F \frac{d^3 p_D}{E_D} \frac{d^3 p_E}{E_E} \frac{d^3 p_{Cz}}{E_C} dx_A dx_B f(x_A) f(x_B) \times \\ & \times \delta(E_C + E_D + E_E - E_A - E_B) \delta(p_{Cz} + p_{Dz} + p_{Ez} - p_{Az} - p_{Bz}) |\mathcal{M}|^2 \end{aligned} \quad (4.18)$$

4.3.2 Integrais nas frações de momentum, x_A e x_B

Para integrar em x_A , usamos a delta do momentum longitudinal $\delta(p_{Cz} + p_{Dz} + p_{Ez} - p_{Az} - p_{Bz})$:

$$\delta\left(p_{Cz} + p_{Dz} + p_{Ez} + \frac{\sqrt{s}}{2}x_B - \frac{\sqrt{s}}{2}x_A\right) = \delta(g_A(x_A)) \quad (4.19)$$

Como o argumento da delta é zero, o valor de x_A fica definido como:

$$x_A = \frac{2(p_{Cz} + p_{Dz} + p_{Ez})}{\sqrt{s}} + x_B \quad (4.20)$$

E a derivada do argumento da delta:

$$g'(x_A) = -\frac{\sqrt{s}}{2} \quad (4.21)$$

Assim, a integral na fração de momentum x_A fica:

$$I_A = \int f(x_A) \delta(g_A(x_A)) dx_A = \frac{f(x_A)}{\left|-\frac{\sqrt{s}}{2}\right|} = \frac{2}{\sqrt{s}} f(x_A) \quad (4.22)$$

Como a delta da energia $\delta(E_C + E_D + E_E - E_A - E_B)$ depende da fração de momentum x_A temos que usar o resultado obtido na Eq. 4.20:

$$\delta(E_C + E_D + E_E - p_{Cz} - p_{Dz} - p_{Ez} - \sqrt{s}x_B) = \delta(g_B(x_B)) \quad (4.23)$$

E a derivada do argumento da delta:

$$g'_B(x_B) = -\sqrt{s} \quad (4.24)$$

O argumento da delta será zero quando:

$$x_B = \frac{E_C + E_D + E_E - p_{Cz} - p_{Dz} - p_{Ez}}{\sqrt{s}} \quad (4.25)$$

Consequentemente a fração de momentum x_A é:

$$x_A = \frac{E_C + E_D + E_E + p_{Cz} + p_{Dz} + p_{Ez}}{\sqrt{s}} \quad (4.26)$$

Agora que integramos em $\vec{p}_{C'}$, x_A e x_B , a seção de choque hadrônica se torna:

$$\sigma = \frac{1}{8(2\pi)^5} \int F \frac{d^3 p_D}{E_D} \frac{d^3 p_E}{E_E} \frac{d p_{Cz}}{E_C} \frac{2}{s} f(x_A) f(x_B) |\mathcal{M}|^2$$

4.3.3 Seção de choque diferencial dupla em função de observáveis

Como descrito na Seção 4.3, ao escrevermos seção de choque diferencial dupla em termos de observáveis, teremos mais duas deltas:

$$\frac{d\sigma}{dM^2 dy} = \frac{1}{8(2\pi)^5} \int F \frac{d^3 p_D}{E_D} \frac{d^3 p_E}{E_E} \frac{d p_{Cz}}{E_C} \frac{2}{s} \delta(q^0 - E_D - E_E) \delta(q_z - p_{Dz} - p_{Ez}) f(x_A) f(x_B) |\mathcal{M}|^2 \quad (4.27)$$

4.3.4 Integral nos momenta longitudinais p_{Dz} e p_{Ez}

A partir da delta do momentum longitudinal, $\delta(q_z - p_{Dz} - p_{Ez})$, temos que o momentum transversal do lépton D fica definido como:

$$p_{Dz} = q_z - p_{Ez} \quad (4.28)$$

Após integrarmos no momentum longitudinal do lépton D, p_{Dz} ficou definido em termos do momentum transversal do fóton e do lépton E. Então ao integrarmos a seção de choque hadrônica com a delta da energia, temos de respeitar o vínculo obtido na Eq.4.28.

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dM^2 dy} &= \frac{1}{8(2\pi)^5} \int F \frac{p_{Dt} d p_{Dt} d \Phi_D}{E_D} \frac{d^3 p_E}{E_E} \frac{d p_{Cz}}{E_C} \times \\ &\times \frac{2}{s} \delta(q^0 - E_D - E_E) f(x_A) f(x_B) |\mathcal{M}|^2 \end{aligned} \quad (4.29)$$

A delta da energia, respeitado o valor do momentum transversal do lépton D, p_{Dz} , passa a ser¹:

$$\delta(q^0 - E_D - E_E) = \delta\left(q^0 - \sqrt{p_{Dt}^2 + (q_z - p_{Ez})^2} - \sqrt{p_{Et}^2 + p_{Ez}^2}\right) \quad (4.30)$$

O argumento da delta $g(p_{Ez})$ define o momentum longitudinal do lépton E, p_{Ez} , como:

$$p_{Ez}^{\pm} = \frac{-q_z(p_{Dt}^2 - p_{Et}^2 + q_z^2 - q_0^2) \pm q_0 \sqrt{[q_0^2 - q_z^2 - (p_{Dt} + p_{Et})^2][q_0^2 - q_z^2 - (p_{Dt} - p_{Et})^2]}}{2(q_0^2 - q_z^2)}. \quad (4.31)$$

Reconhecendo as componentes do quadrimomentum do fóton em termos dos observáveis M^2 e os momenta transversais dos léptons D e E:

$$q_0^2 - q_z^2 = M^2 + (\vec{p}_{Dt} + \vec{p}_{Et})^2 \quad (4.32)$$

¹ Nos cálculos a seguir $p = |\vec{p}|$

Temos que o momentum longitudinal do lépton E é:

$$p_{Ez}^{\pm} = \frac{q_z(2p_{Et}^2 + M^2 + 2\vec{p}_{Dt} \cdot \vec{p}_{Et})}{2(M^2 + (\vec{p}_{Dt} + \vec{p}_{Et})^2)} \pm \frac{q_0 \sqrt{[M^2 - 2p_{Dt}p_{Et}(1 - \cos \varphi_{DE})][M^2 + 2p_{Dt}p_{Et}(1 + \cos \varphi_{DE})]}}{2(M^2 + (\vec{p}_{Dt} + \vec{p}_{Et})^2)} \quad (4.33)$$

Usando a aproximação de que uma partícula com massa muito pequena pode, segundo a Equação de Einstein, ter sua energia aproximada pelo módulo do seu tri-momentum: $E \approx |\vec{p}|$. Então a energia do lépton E passa a ser $E_E^2 = p_{Ez}^2 + p_{Et}^2$. Substituindo o momentum transversal do lépton E, temos:

$$E_E^{\pm} = \frac{q_0(2p_{Et}^2 + M^2 + 2\vec{p}_{Dt} \cdot \vec{p}_{Et})}{2(M^2 + (\vec{p}_{Dt} + \vec{p}_{Et})^2)} \pm \frac{q_z \sqrt{[M^2 - 2p_{Dt}p_{Et}(1 - \cos \varphi_{DE})][M^2 + 2p_{Dt}p_{Et}(1 + \cos \varphi_{DE})]}}{2(M^2 + (\vec{p}_{Dt} + \vec{p}_{Et})^2)} \quad (4.34)$$

A seção de choque hadrônica diferencial em termos dos observáveis, massa de dilépton ao quadrado e rapidez, passa a ser:

$$\frac{d\sigma}{dM^2 dy} = \frac{1}{8(2\pi)^4} \int \frac{2F}{s} \frac{p_{Dt}p_{Et}f(x_A)f(x_B)|\mathcal{M}|^2}{E_C E_D E_E^{\pm} |g'(p_{Ez}^{\pm})|} dp_{Dt} dp_{Et} d\varphi_{DE} dp_{Cz} \quad (4.35)$$

A partir da delta das energias, Eq.4.30, obtemos parte do denominador:

$$E_D E_E^{\pm} g'(p_{Ez}^{\pm}) = E_E^{\pm} q_z - p_{Ez}^{\pm} q_0 \quad (4.36)$$

O primeiro termo do denominador será:

$$E_E^{\pm} q_z = \frac{q_z q_0(2p_{Et}^2 + M^2 + 2\vec{p}_{Dt} \cdot \vec{p}_{Et})}{2(M^2 + (\vec{p}_{Dt} + \vec{p}_{Et})^2)} \pm \frac{q_z^2 \sqrt{[M^2 - 2p_{Dt}p_{Et}(1 - \cos \varphi_{DE})][M^2 + 2p_{Dt}p_{Et}(1 + \cos \varphi_{DE})]}}{2(M^2 + (\vec{p}_{Dt} + \vec{p}_{Et})^2)} \quad (4.37)$$

E o segundo termo do denominador será:

$$p_{Ez}^{\pm} q_0 = \frac{q_z q_0(2p_{Et}^2 + M^2 + 2\vec{p}_{Dt} \cdot \vec{p}_{Et})}{2(M^2 + (\vec{p}_{Dt} + \vec{p}_{Et})^2)} \pm \frac{q_0^2 \sqrt{[M^2 - 2p_{Dt}p_{Et}(1 - \cos \varphi_{DE})][M^2 + 2p_{Dt}p_{Et}(1 + \cos \varphi_{DE})]}}{2(M^2 + (\vec{p}_{Dt} + \vec{p}_{Et})^2)} \quad (4.38)$$

Como E^+ corresponde a p_{Ez}^+ , temos:

$$E_E^+ q_z - p_{Ez}^+ q_0 = \sqrt{M^2 + 4M^2 p_{Dt} p_{Et} \cos \varphi - 4p_{Dt} p_{Et} (1 - \cos^2 \varphi)} \quad (4.39)$$

E a outra raiz, E^- corresponde a p_{Ez}^- , temos:

$$\begin{aligned} E_E^- q_z - p_{Ez}^- q_0 &= \frac{-2q_z q_0(2p_{Et}^2 + M^2 + 2\vec{p}_{Dt} \cdot \vec{p}_{Et})}{2(M^2 + (\vec{p}_{Dt} + \vec{p}_{Et})^2)} + \\ &+ \frac{(q_z^2 + q_0^2) \sqrt{[M^2 - 2p_{Dt}p_{Et}(1 - \cos \varphi_{DE})][M^2 + 2p_{Dt}p_{Et}(1 + \cos \varphi_{DE})]}}{2(M^2 + (\vec{p}_{Dt} + \vec{p}_{Et})^2)} \end{aligned} \quad (4.40)$$

Agora que fizemos todas as integrais usando as deltas disponíveis, vamos definir os limites de integração para o espaço de fase restante.

4.3.5 Limites de integração

Limites do momentum transversal, p_{Dt} e do momentum longitudinal p_{Cz}

Vamos analisar a condição vinda da delta da energia, Eq. 4.30, para as raízes de p_{Ez} . Para que o momentum longitudinal p_{Ez} (Eq.4.31) assuma valores reais, o primeiro fator dentro da raiz quadrada deve ser positivo, já que o segundo é sempre positivo. Então φ_{DE} possui um limite inferior:

$$\cos \varphi_{DE} > 1 - \frac{M^2}{2p_{Dt}p_{Et}} \quad (4.41)$$

Considerando também que $\cos \varphi_{DE} > -1$, obtemos o limite inferior para p_{Dt} :

$$p_{Dt} > \frac{M^2}{4p_{Et}} \quad (4.42)$$

Para definir os limites de integração para p_{Cz} usaremos os valores de x_A e x_B . O limite inferior é dado através da Eq. 4.25, substituindo a soma das energias dos léptons pela energia do fóton: $q_0 = E_D + E_E$ e a soma dos momenta transversais dos léptons pelo momentum do fóton $q_z = p_{Dz} + p_{Ez}$:

$$x_B = \frac{E_C - p_{Cz} + q_0 - q_z}{\sqrt{s}} \quad (4.43)$$

Notamos que as subtrações das componentes longitudinais do momentum de cada partícula de suas respectivas energias podem ser feitas de modo que atinjam o valor mínimo de \sqrt{s} . De modo que $x_B \rightarrow 1$. Então o limite inferior de p_{Cz} é:

$$p_{Cz}^{\min} \rightarrow \frac{q_t^2 - (\sqrt{s} - q_0 + q_z)^2}{2(\sqrt{s} - q_0 + q_z)} \quad (4.44)$$

E o limite superior é dado através da Eq. 4.26:

$$x_A = \frac{E_C + p_{Cz} + q_0 + q_z}{\sqrt{s}} \quad (4.45)$$

Notamos que as somas das energias de cada partícula com suas respectivas componentes longitudinais do momentum podem ser feitas de modo que atinjam o valor máximo de \sqrt{s} . De modo que $x_A \rightarrow 1$. Então o limite superior de p_{Cz} é:

$$p_{Cz}^{\max} \rightarrow \frac{(\sqrt{s} - q_0 - q_z)^2 - q_t^2}{2(\sqrt{s} - q_0 - q_z)} \quad (4.46)$$

Limite do momentum transversal p_{Et}

Se o limite inferior de p_{Cz} for maior que o limite superior, a integral em p_{Cz} será zero, nesse caso limite, encontramos os limites de p_{Et} . Ou seja:

$$p_{Cz}^{\min} > p_{Cz}^{\max} \quad (4.47)$$

Substituindo os valores limites de p_{Cz} :

$$q_0 < \frac{s + M^2}{2\sqrt{s}} \quad (4.48)$$

Usando que $q_0 = \sqrt{M^2 + q_t^2} \cosh y$, chegamos a um limite superior para o ângulo:

$$\cos \varphi_{DE} < \frac{1}{2p_{Dt}p_{Et}} \left(\frac{(s + M^2)^2}{4s \cosh^2 y} - M^2 - p_{Dt}^2 - p_{Et}^2 \right) \quad (4.49)$$

Seguindo o mesmo raciocínio usado nos limites de p_{Cz} , a integral em φ_{DE} será nula se o limite inferior for maior que o limite superior. Assim, ao resolvermos a inequação 4.49 para p_{Dt} , encontramos o limite superior de p_{Dt} e pela Eq. 4.42, temos que:

$$\frac{M^2}{4p_{Et}} < p_{Dt} < -p_{Et} + \frac{s + M^2}{2\sqrt{s} \cosh y} \quad (4.50)$$

Para que o limite superior de p_{Dt} seja válido, ou seja um número positivo, temos a condição que:

$$p_{Et} < \frac{s + M^2}{2\sqrt{s} \cosh y} \quad (4.51)$$

Agora, com os limites dos momenta transversais dos léptons, o limite do momentum longitudinal do párton C e os limites do ângulo azimutal entre os léptons, podemos fazer a integral da seção de choque. Usando o primeiro denominador, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dM^2 dy} &= \frac{1}{8(2\pi)^4} \int_{\frac{M^2}{4p_{Et}}}^{-p_{Et} + \frac{s+M^2}{2\sqrt{s} \cosh y}} \int_0^{\frac{s+M^2}{2\sqrt{s} \cosh y}} \int_{\frac{q_t^2 - (\sqrt{s}-q_0+q_z)^2}{2(\sqrt{s}-q_0+q_z)}}^{\frac{(\sqrt{s}-q_0-q_z)^2 - q_t^2}{2(\sqrt{s}-q_0-q_z)}} dp_{Dt} dp_{Et} dp_{Cz} d\varphi_{DE} \times \\ &\times \frac{2}{Fs} \frac{p_{Dt} p_{Et} f(x_A) f(x_B) |\mathcal{M}|^2}{\sqrt{p_{Cz}^2 + q_t^2} \sqrt{M^2 + 4M^2 p_{Dt} p_{Et} \cos \varphi - 4p_{Dt} p_{Et} (1 - \cos^2 \varphi)}} \end{aligned} \quad (4.52)$$

4.4 Próximos passos

É possível agora fazer qualquer corte cinemático escolhido para o processo em ordem seguinte à dominante. Também é necessário incluir os fatores de Sudakov, conforme discutido

no início deste capítulo. A análise de qual seria a escala ótima (que depende do corte) pode ser feita analiticamente ou numericamente. Em particular, um corte em ângulo azimutal é propício e seria inédito na literatura. Este resultado seria complementar ao corte em momentum transversal, também trabalhando em uma região de pequeno x , mas talvez mais facilmente observável pelos experimentos.

5 *Conclusão e perspectivas*

Revisamos a cromodinâmica quântica e a importância da escala de energia na interpretação dos constituintes dos prótons que são colididos no LHC. No caso de grandes valores da escala de energia chega-se a fenômenos como liberdade assintótica e ao modelo de pártons, em especial no Cap. 2.2. No modelo, os hádrons colididos são entendidos por meio das distribuições de pártons e suas contribuições no cálculo da seção de choque. Posteriormente, a evolução das distribuições de acordo com a escala de energia foi estudada, sendo dada pelas equações DGLAP. Em particular, esta evolução produz um fator logarítmico.

Com as ferramentas revistas no Cap. 2, estávamos em condições de no Cap. 3 entender as medidas feitas no LHC de colisões de prótons usando a cromodinâmica perturbativa através do processo Drell–Yan em ordem dominante e em ordem seguinte à dominante. Para separar o carácter perturbativo do que não é na seção de choque para o processo Drell–Yan em ordem seguinte à dominante, utiliza-se a escala de fatorização. Ainda no Cap. 3, foi revisto que o fator logarítmico produzido pela DGLAP na verdade nada mais é do que uma contribuição da ordem seguinte à dominante inserida na ordem dominante (o mesmo também pode ser aplicado a ordens mais altas). Por isso, ao analisarmos o processo em ordem seguinte à dominante juntamente com o processo em ordem dominante evoluído iremos considerar o termo logarítmico duas vezes. Para evitar a dupla contagem desse termo logarítmico, subtraímos esse termo na ordem seguinte à dominante usando a escala de fatorização.

Revisado foi no Cap. 4 o método de calcular uma escala de fatorização ótima igualando-se o resultado em ordem dominante do processo com a ordem seguinte à dominante. Como exemplo, usou-se o processo Drell–Yan. É possível obter diferentes escalas de fatorização ótima para controlar quais contribuições do processo em ordem seguinte à dominante serão incluídas no processo em ordem dominante através das equações de evolução DGLAP. Além disso, o cálculo da seção de choque hadrônica foi explicitado integrando analiticamente o momentum transversal do párton de estado final e as frações de momentum do pártons iniciais. Nesse

trabalho reproduzimos a seção de choque diferencial dupla em função da rapidez e da massa de diléptons, mas é possível calculá-la para outros observáveis usando o Jacobiano adequado.

A sonda dessa região com o processo foi feita anteriormente nas referências [23] utilizando as escalas de fatorização apropriadas que revisamos nesse trabalho. Em trabalho posterior [49], houve uma melhora no poder de sonda através de um corte no momentum transversal e foi incluído o fator de Sudakov.

Como perspectivas futuras de continuação deste trabalho, pode-se variar a escala de fatorização ótima através do corte no ângulo azimutal incluindo os fatores de Sudakov. Dessa maneira, obter novas informações a respeito da região de pequeno x , ainda pouco entendida.

A escolha de um corte cinemático não afeta o processo Drell–Yan em ordem dominante, pois os quarks iniciais têm momentum transversal desprezível e não há um glúon para gerar momentum transversal. Sendo assim, os léptons no estado final serão colineares, fazendo necessária a análise do processo Drell–Yan em ordem seguinte à dominante.

Seguindo o procedimento da Ref. [49], teremos de escrever a seção de choque do sub-processo em ordem seguinte à dominante, Eq. 4.2, em função da diferença entre os ângulos azimutais dos léptons ao invés de t . Como o momentum transversal do fóton é igual a soma dos momenta dos lépton temos: $q_t^2 = p_{Dt}^2 + p_{Et}^2 + 2p_{Dt}p_{Et}\cos\varphi_{DE}$, podemos substituir na relação de t em função no momentum transversal, Eq. 4.7, para obtermos t em função de φ_{DE} :

$$-t = \frac{1}{2} \left[\hat{s} - M^2 \pm \sqrt{(\hat{s} - M^2)^2 - 4\hat{s}(p_{Dt}^2 + p_{Et}^2 + 2p_{Dt}p_{Et}\cos\varphi_{DE})} \right] \quad (5.1)$$

dando

$$dt = \pm \frac{2\hat{s}p_{Dt}p_{Et}\sin\varphi_{DE}d\varphi_{DE}}{\sqrt{(\hat{s} - M^2)^2 - 4\hat{s}(p_{Dt}^2 + p_{Et}^2 + 2p_{Dt}p_{Et}\cos\varphi_{DE})}} \quad (5.2)$$

Substituindo t na seção de choque, Eq. 4.2, integramos sobre o intervalo de φ_{DE} correspondente ao intervalo de t_0 a t_1 , e então igualamos com a seção de choque em ordem dominante que foi evoluída com a equação DGLAP integrada até a escala de fatorização ótima μ_0 :

$$\int_{t_0}^{\mu_0} dt \text{ DGLAP} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{d\sigma(\text{gq} \rightarrow \text{q}\gamma^*)}{dM^2 d\varphi} + I(\mu_0, \varphi_0) \quad (5.3)$$

Surge uma dependência da escala de fatorização ótima com o ângulo azimutal devido ao termo $I(\mu_0, \varphi_0)$. Agora podemos reduzir a escala de fatorização ótima em função do ângulo azimutal do dilépton para escolher qual região será sondada.

Referências Bibliográficas

- [1] B. P. Abbott *et al.* [LIGO Scientific and Virgo Collaborations], Phys. Rev. Lett. **116**, no. 6, 061102 (2016) doi:10.1103/PhysRevLett.116.061102 [arXiv:1602.03837 [gr-qc]].
- [2] R. Aaij *et al.* [LHCb Collaboration], Phys. Rev. Lett. **112**, no. 22, 222002 (2014) doi:10.1103/PhysRevLett.112.222002 [arXiv:1404.1903 [hep-ex]].
- [3] N. Armesto, A. Dainese, D. d’Enterria, S. Masciocchi, C. Roland, C. A. Salgado, M. van Leeuwen and U. A. Wiedemann, arXiv:1601.02963 [hep-ph].
Phys. Rev. Lett. **22**, 744 (1969). doi:10.1103/PhysRevLett.22.744
- [4] R. Aaij *et al.* [LHCb Collaboration], Phys. Rev. Lett. **115**, 072001 (2015) doi:10.1103/PhysRevLett.115.072001 [arXiv:1507.03414 [hep-ex]].
- [5] Griffiths, D.J.. *Introduction to Elementary Particles* 2nd ed. Weiley-VCH
- [6] Aitchison, I. J. R., HEY, A. J. G.. *Gauge Theories in Particle Physics. Volume I: From Relativistic Quantum Mechanics to QED*. Bristol: Institute of Physics Publishing, 2002.
- [7] Greiner, W., Schäfer A.. *Quantum Chromodynamics*. Springer, 1st ed. 1994
- [8] Peskin, M. E., Schroeder D. V.. *An Introduction to Quantum Field Theory* Westview Press (1995)
- [9] K. A. Olive *et al.* [Particle Data Group Collaboration], Chin. Phys. C **38**, 090001 (2014). doi:10.1088/1674-1137/38/9/090001
- [10] C. G. Callan, Jr., Phys. Rev. D **2**, 1541 (1970). doi:10.1103/PhysRevD.2.1541
- [11] K. Symanzik, Commun. Math. Phys. **18**, 227 (1970). doi:10.1007/BF01649434
- [12] S. Chatrchyan *et al.* [CMS Collaboration], Eur. Phys. J. C **73**, no. 10, 2604 (2013) doi:10.1140/epjc/s10052-013-2604-6 [arXiv:1304.7498 [hep-ex]].
- [13] T. M. Yan and S. D. Drell, Int. J. Mod. Phys. A **29**, 0071 (2014) doi:10.1142/S0217751X14300713 [arXiv:1409.0051 [hep-ph]].
- [14] J. C. Peng and J. W. Qiu, Prog. Part. Nucl. Phys. **76**, 43 (2014) doi:10.1016/j.pnpnp.2014.01.005 [arXiv:1401.0934 [hep-ph]].
- [15] <https://lhpdf.hepforge.org/>
- [16] A. Buckley, J. Ferrando, S. Lloyd, K. Nordström, B. Page, M. Rüfenacht, M. Schönherr and G. Watt, Eur. Phys. J. C **75**, 132 (2015) doi:10.1140/epjc/s10052-015-3318-8 [arXiv:1412.7420 [hep-ph]].
- [17] S. Dulat *et al.*, arXiv:1506.07443 [hep-ph].

- [18] F. D. Aaron *et al.* [H1 and ZEUS Collaborations], *JHEP* **1001**, 109 (2010) doi:10.1007/JHEP01(2010)109 [arXiv:0911.0884 [hep-ex]].
- [19] R. D. Ball *et al.* [NNPDF Collaboration], arXiv:1110.1863 [hep-ph].
- [20] R. S. Thorne, L. A. Harland-Lang, A. D. Martin and P. Motylinski, arXiv:1508.06621 [hep-ph].
- [21] L. A. Harland-Lang, A. D. Martin, P. Motylinski and R. S. Thorne, *Eur. Phys. J. C* **75**, no. 5, 204 (2015) doi:10.1140/epjc/s10052-015-3397-6 [arXiv:1412.3989 [hep-ph]].
- [22] [LHCb Collaboration], LHCb-CONF-2012-013, CERN-LHCb-CONF-2012-013.
- [23] E. G. de Oliveira, A. D. Martin and M. G. Ryskin, *Eur. Phys. J. C* **71**, 1727 (2011) doi:10.1140/epjc/s10052-011-1727-x [arXiv:1106.5334 [hep-ph]].
- [24] E. G. de Oliveira, A. D. Martin and M. G. Ryskin, *Eur. Phys. J. C* **72**, 2069 (2012) [arXiv:1205.6108 [hep-ph]].
- [25] E. G. de Oliveira, A. D. Martin and M. G. Ryskin, *JHEP* **1302**, 060 (2013) doi:10.1007/JHEP02(2013)060 [arXiv:1206.2223 [hep-ph]].
- [26] A. D. Martin, W. J. Stirling, R. S. Thorne and G. Watt, *Eur. Phys. J. C* **63**, 189 (2009) doi:10.1140/epjc/s10052-009-1072-5 [arXiv:0901.0002 [hep-ph]].
- [27] D. Diakonov, M. G. Ryskin and A. G. Shuvaev, *JHEP* **1302**, 069 (2013) doi:10.1007/JHEP02(2013)069 [arXiv:1211.1578 [hep-ph]].
- [28] A. D. Martin, R. G. Roberts, W. J. Stirling and R. S. Thorne, *Eur. Phys. J. C* **23**, 73 (2002) doi:10.1007/s100520100842 [hep-ph/0110215].
- [29] Schwartz M. D. *Quantum Field Theory and the Standard Model* Cambridge University Press (2014)
- [30] G. Altarelli and G. Parisi, *Nucl. Phys. B* **126**, 298 (1977). doi:10.1016/0550-3213(77)90384-4
- [31] Y. L. Dokshitzer, *Sov. Phys. JETP* **46**, 641 (1977) [*Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **73**, 1216 (1977)].
- [32] V. N. Gribov and L. N. Lipatov, *Sov. J. Nucl. Phys.* **15**, 438 (1972) [*Yad. Fiz.* **15**, 781 (1972)].
- [33] G. Curci, W. Furmanski and R. Petronzio, *Nucl. Phys. B* **175**, 27 (1980). doi:10.1016/0550-3213(80)90003-6
- [34] W. Furmanski and R. Petronzio, *Nucl. Phys. B* **195**, 237 (1982). doi:10.1016/0550-3213(82)90398-4
- [35] A. Vogt, S. Moch and J. A. M. Vermaseren, *Nucl. Phys. B* **691**, 129 (2004) doi:10.1016/j.nuclphysb.2004.04.024 [hep-ph/0404111].
- [36] S. Moch, J. A. M. Vermaseren and A. Vogt, *Nucl. Phys. B* **688**, 101 (2004) doi:10.1016/j.nuclphysb.2004.03.030 [hep-ph/0403192].

- [37] V. Khachatryan *et al.* [CMS Collaboration], arXiv:1412.1115 [hep-ex].
- [38] LHCb Collaboration, (2012), LHCb-CONF-2012-013.
- [39] G. Aad *et al.* [ATLAS Collaboration], JHEP **1406**, 112 (2014) [arXiv:1404.1212 [hep-ex]].
- [40] G. Aad *et al.* [ATLAS Collaboration], Phys. Lett. B **749**, 242 (2015) doi:10.1016/j.physletb.2015.07.069 [arXiv:1506.07098 [hep-ex]].
- [41] G. Aad *et al.* [ATLAS Collaboration], arXiv:1512.02192 [hep-ex].
- [42] E. G. de Oliveira *Efeitos nucleares no processo Drell-Yan : formalismos de dipolos de cor e de momentum transversal intrínseco* 2010 101 f, Tese, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre - RS, 2010.
- [43] S. D. Drell and T. M. Yan, Phys. Rev. Lett. **25**, 316 (1970) [Phys. Rev. Lett. **25**, 902 (1970)]. doi:10.1103/PhysRevLett.25.316
- [44] J. H. Christenson, G. S. Hicks, L. M. Lederman, P. J. Limon, B. G. Pope and E. Zavattini, Phys. Rev. Lett. **25**, 1523 (1970). doi:10.1103/PhysRevLett.25.1523
- [45] G. Altarelli, G. Parisi and R. Petronzio, Phys. Lett. B **76**, 351 (1978). doi:10.1016/0370-2693(78)90805-5
- [46] R. Hamberg, W. L. van Neerven and T. Matsuura, Nucl. Phys. B **359**, 343 (1991) [Nucl. Phys. B **644**, 403 (2002)]. doi:10.1016/0550-3213(91)90064-5
- [47] Anselmino M., Caruso F., MAhon J. R. P., Oguri V. *Introdução à QCD Perturbativa* LTC (2013)
- [48] Ellis, R. K., Stirling W. J., Webber, B. R.. *QCD and Collider Physics (Cambridge Monographs on Particle Physics, Nuclear Physics and Cosmology)* Cambridge University Press (2003)
- [49] E. G. de Oliveira, A. D. Martin and M. G. Ryskin, Eur. Phys. J. C **73**, 2361 (2013) [arXiv:1212.3135].
- [50] Halzen, F., Martin, A. D.. *Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*(1984)
- [51] V. V. Sudakov, Sov. Phys. JETP **3**, 65 (1956) [Zh. Eksp. Teor. Fiz. **30**, 87 (1956)].

APÊNDICE A – Seção de choque partônica

Nesse Apêndice vamos recordar como a seção de choque partônica é obtida. Essa parte do texto teve como suporte a Ref. [50]. A densidade de probabilidade, ρ , de partículas descritas por uma função de onda ϕ é: $\rho = 2E|N|^2$. A relação entre ρ e E é feita de modo que compensa a contração de Lorentz no elemento de volume d^3x e mantém o número de partículas ρd^3x inalterado. Portanto vamos trabalhar num volume V e normalizar para $2E$ partículas em V : $\int_V \rho dV = 2E$. Isto é, adotamos a normalização covariante:

$$N = \frac{1}{\sqrt{V}} \quad (\text{A.1})$$

No processo $A + B \rightarrow C + D$, a taxa de transição do estado inicial para o estado final por unidade de volume é:

$$\mathcal{W}_{fi} = \frac{|T_{fi}|^2}{TV} \quad (\text{A.2})$$

onde T é o intervalo de tempo da interação e a amplitude de transição é dada através do elemento de matriz invariante \mathcal{M} :

$$T_{fi} = -iN_A N_B N_C N_D (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_C + p_D - p_A - p_B) \mathcal{M} \quad (\text{A.3})$$

onde a função delta garante a conservação de momenta. Substituindo a amplitude de transição com as normalizações para cada partícula, sendo que uma delta permanece e a outra multiplicada por $(4\pi)^2$ dá exatamente TV . Então a taxa de transição se torna:

$$\mathcal{W}_{fi} = (2\pi)^4 \frac{\delta^{(4)}(p_C + p_D - p_A - p_B) |\mathcal{M}|^2}{V^4} \quad (\text{A.4})$$

Resultados experimentais em espalhamento $AB \rightarrow CD$ geralmente mostram uma seção de choque cuja relação com a taxa de transição é dada por:

$$\text{Seção de choque} = \frac{\mathcal{W}_{fi}}{\text{Fluxo inicial}} \times \text{Número de estados finais} \quad (\text{A.5})$$

Para uma única partícula, a mecânica quântica restringe o *número de estados finais* em um volume V com elemento de momenta d^3p sendo $V d^3p / (2\pi)^3$. Mas nós temos $2E$ partículas num volume V , então:

$$\text{Número de estados finais/partícula} = \frac{V d^3p}{(2\pi)^3 2E} \quad (\text{A.6})$$

Para partículas C, D espalhadas em elementos de volume d^3p_C , d^3p_D temos:

$$\text{Número de estados finais disponíveis} = \frac{V d^3p_C}{(2\pi)^3 2E_C} \frac{V d^3p_D}{(2\pi)^3 2E_D} \quad (\text{A.7})$$

O número de feixes de partículas passando por unidade de área por unidade de tempo é: $|\vec{v}_A| 2E_A/V$, e o número partículas alvo por unidade de volume é $2E_B/V$. Para obter uma medida independente de normalização de uma densidade de entrada, temos que tomar:

$$\text{Fluxo inicial} = |\vec{v}_A| \frac{2E_A}{V} \frac{2E_B}{V} \quad (\text{A.8})$$

Inserindo a taxa de transição (Eq. A.4), o número de estados finais (Eq. A.7) e o fluxo inicial (Eq. A.8) na seção de choque (Eq. A.5), temos:

$$d\sigma = \frac{1}{F} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_C + p_D - p_A - p_B) \frac{d^3p_C}{(2\pi)^3 2E_C} \frac{d^3p_D}{(2\pi)^3 2E_D} |\mathcal{M}|^2 \quad (\text{A.9})$$

onde fator de fluxo F é o quanto as partícula iniciais interagem entre si que pode ser escrito como:

$$F = \frac{1}{\left| \left(\frac{\vec{p}_A}{E_A} - \frac{\vec{p}_B}{E_B} \right) \right|} \quad (\text{A.10})$$

Com esse resultado, podemos calcular a seção de choque integrada a partir do elemento de matriz invariante. Em muitos casos temos a seção de choque total dada pela integral de uma certa função $f(x)$:

$$\sigma = \int f(x) dx \quad (\text{A.11})$$

Se quiser que ela resulte num dado valor v , usamos a delta de Dirac:

$$\frac{d\sigma}{dx} \Big|_{x=v} = \int f(x) \delta(x-v) dx = f(v) \quad (\text{A.12})$$

Outra maneira é escrevendo diretamente a seção de choque diferencial:

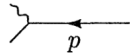
$$d\sigma = f(x) dx \quad (\text{A.13})$$

aplicado em v :

$$\frac{d\sigma}{dx} \Big|_{x=v} = f(x) \Big|_{x=v} \quad (\text{A.14})$$

APÊNDICE B – Regras de Feynman

Neste apêndice mostraremos apenas as regras de Feynman dos diagramas correspondentes ao processo Drell–Yan. Uma listagem completa é encontrada na Ref. [8], de onde retiramos as regras contidas nesse apêndice. O diagrama para um férmion de estado inicial com momentum p e spin s , é representada por uma linha reta com uma seta apontando em direção ao vértice:



$$= u^s(p)$$


Definimos o vértice como o ponto onde duas ou mais linhas se encontram. A regra de Feynman correspondente a esse diagrama é o spinor $u^s(p)$. Um antiférmion de spin s e momentum p no estado inicial é representada no diagrama por uma seta em sentido oposto ao vértice:



$$= \bar{v}^s(p)$$

A regra correspondente para esse diagrama é dada por: $\bar{v}^s(p)$, onde a barra sobre a letra significa que a representação do spinor será uma matriz linha.

No processo Drell–Yan, o quark (férmion) e o antiquark (antférmion) se aniquilam no vértice da eletrodinâmica quântica, sendo Q a carga elétrica do quark, com e sendo a carga elétrica elementar e as matrizes de Dirac representadas por γ^μ . A regra de Feynman para esse vértice é:



$$= iQe\gamma^\mu$$

Aqui, os bósons são representados por linhas onduladas no diagrama. Após a aniquilação do par, o fóton criado decairá em um lépton e antilépton. Sendo assim, o fóton será uma linha entre os vértices de aniquilação e criação caracterizando-o como um propagador. A regra para um propagador com momentum p é dada por:

$$\text{wavy line with arrow pointing left labeled } p = \frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}$$

Agora, mostraremos as regras para férmions de estado final, no processo Drell–Yan eles serão os léptons. Um lépton de spin s e momentum p no estado final é representada através de uma linha reta com uma seta apontando em direção oposta ao vértice, cujo spinor é $\bar{u}^s(p)$.

$$\text{Diagram 1} = \bar{u}^s(p)$$

Um antilépton de estado final é representada por uma linha reta com uma seta em direção ao vértice:

$$\text{Diagram: A horizontal line with an arrow pointing right labeled } p \text{ below it. A wavy line branches off to the left from the top of the horizontal line.} = v^s(p)$$

Assim, encerramos as regras de Feynman necessárias para o processo Drell–Yan em ordem dominante. Aplicando-as para calcular o elemento de matriz invariante obtido no Cap. 3, teremos:

$$i\mathcal{M} = \bar{v}_B^{s'}(ie_q e \gamma^\mu) u_A^s \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\varepsilon} \right) \bar{u}_C^r (ie \gamma^\nu) v_D^{r'}. \quad (\text{B.1})$$

onde nomeamos o momentum do fóton como q e incluímos subíndices referentes aos férmions nos spinores. A carga elétrica no vértice de aniquilação é a carga do quark: $Q = e_q$ e no vértice de criação será a carga elétrica dos léptons então $Q = -1$.

Para o processo Drell–Yan em ordem seguinte à dominante, precisaremos da regra para o vértice da cromodinâmica quântica. Aqui, o glúon está representado por uma linha ondulada, mas é comum ele ser representado por uma mola. A regra correspondente ao vértice com o glúon é dada pela multiplicação da constante de acoplamento forte g , as matrizes de Dirac γ^μ , $\mu = 1, 2, 3$, e as matrizes t^a , $a = 1 \dots 8$:

a, μ

$= ig\gamma^\mu t^a$

Aqui, apresentamos apenas as regras de Feynman necessárias para o processo Drell–Yan em ordem dominante e em ordem seguinte à dominante. Uma lista completa pode ser encontrada nas Ref. [6–8].

APÊNDICE C – Fator de cor

Neste apêndice mostraremos as matrizes de Gell-Mann que representam as 8 configurações de cor do glúon, a partir das quais obteremos o fator de cor a ser usado ao aplicarmos as regras de Feynman para o espalhamento Compton do processo Dell–Yan em ordem seguinte à dominante.

Ao aplicarmos a regra de Feynman para o vértice da cromodinâmica quântica: $ig_s t^a \gamma^\mu$ e multiplicarmos pelo seu complexo conjugado $-ig_s (t^a)^\dagger \gamma^{\mu'}$ o produto $t^a (t^a)^\dagger$, com $a = 1 \dots 8$ envolve as matrizes matrizes de Gell-Man λ^a , sendo que $t^a = \frac{\lambda^a}{2}$:

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda^6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda^8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Na matriz λ_{ji}^a , a representa uma das 8 possíveis configurações de cor carregadas pelo glúon, i a cor do quark antes de emitir o glúon e j a cor do quark depois de emitir o glúon. No produto das matrizes está implícita as somas das matrizes Gell-Man com $a = 1 \dots 8$, para cada cor inicial i e cor final j , onde $i, j = 1, 2, 3$. Explicitamente, temos o produto como:

$$\lambda^a (\lambda^a)^\dagger = \sum_a \sum_{i,j} \lambda_{ji}^a (\lambda_{ij}^a)^* \quad (\text{C.1})$$

Ao fazer a transposta conjugada de uma matriz de Gell-Man, notamos que ela mantém-se inalterada, ou seja, elas são auto-adjuntas.

$$\lambda^1 (\lambda^1)^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.2})$$

$$\lambda^3 (\lambda^3)^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.3})$$

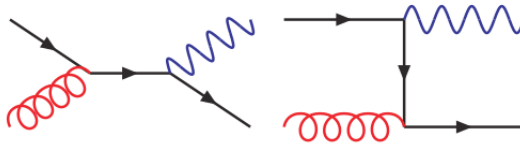


Figura C.1: Espalhamento Compton do Processo Drell–Yan em Ordem seguinte à Dominante, com um glúon e um quark no estado inicial. O quark contribui com $\frac{1}{3}$ no fator de cor, enquanto o que glúon contribui com $\frac{1}{8}$.

$$\lambda^8 (\lambda^8)^\dagger = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad (\text{C.4})$$

A multiplicação de cada matriz λ pela sua transposta conjugada resulta em uma matriz diagonal de entradas 1, 1 e 0 que serão somadas, ou seja temos o traço da matriz que resulta da multiplicação $\lambda^a (\lambda^a)^\dagger$. Então a soma pode ser escrita como:

$$\sum_a \sum_{ij} \lambda_{ji}^a \lambda_{ij}^a = \sum_a \text{Tr}[\lambda^a \lambda^a] = \sum_a 2 = 8 \cdot 2 = 16 \quad (\text{C.5})$$

Se em vez de usar λ usarmos $\lambda/2$, o traço da multiplicação será 1/4, e a soma dará 16/4 que é o $C_2(r)$. Há dois desdobramentos possíveis envolvendo quark e glúon.¹ No desdobramento de quark para quark e glúon, o quark inicial tem 3 possibilidades de cor, então dividimos por 3:

$$\frac{1}{3} \text{Tr}[\lambda^a \lambda^a] \quad (\text{C.6})$$

No desdobramento de glúon para quark e antiquark, o glúon possui 8 configurações de carga de cor, então dividimos por 8:

$$\frac{1}{8} \text{Tr}[\lambda^a \lambda^a] \quad (\text{C.7})$$

Para os diagramas de espalhamento Compton do processo Drell–Yan em ordem seguinte à dominante, temos um quark e um glúon no estado inicial para ambos os canais. Então, o fator de cor dado sobre a média das cores do quark e do glúon, utilizando as matrizes de Gell-Mann será:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} \sum_a \sum_{ij} \lambda_{ji}^a \lambda_{ij}^a = \frac{16}{24} = \frac{4}{6}. \quad (\text{C.8})$$

Como temos que $t^a = \lambda^a/2$, ainda resta multiplicarmos por um fator 1/2 para cada t , então o fator de cor deve ser multiplicado por 1/4:

$$\frac{1}{3} \frac{1}{8} \text{Tr}(t^a t^a) = \frac{1}{6}. \quad (\text{C.9})$$

¹Há os vértices de 3 e 4 glúons.